Hipopotam a metoda wariacyjna

Michał WOJCIECHOWSKI

Przypominamy, że...

Przestrzeń metryczna to dowolny zbiór X zaopatrzony w *metrykę* (lub inaczej *odległość*), to znaczy funkcję $\rho : X \times X \to \mathbf{R}_+$, która spełnia następujące warunki:

(i) $\rho(x, y) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = y$;

(ii) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ dla wszystkich $x, y \in X$;

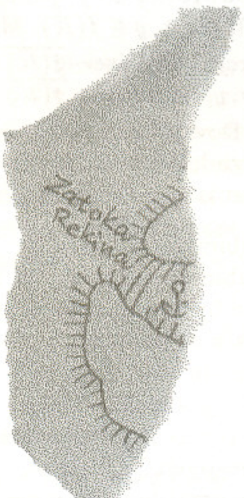
(iii) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ dla wszystkich $x, y, z \in X$.

Trzeci warunek nazywamy *nierównością trójkąta*.

Ciąg (y_n) punktów przestrzeni metrycznej X jest *zbieżny* do y wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{n\to\infty} \rho(y_n, y) = 0$.

Powiemy, że podzbiór K przestrzeni metrycznej X jest *zwarty*, jeśli dowolny ciąg (x_n) punktów zbioru K zawiera podciąg (x_{n_k}) zbieżny do pewnego $x \in K$.

Z każdego pokrycia podzbioru zwartego zbiorami otwartymi można wybrać pokrycie skończone.



Każdy wie, że hipopotam potrafi potężnie rozdziawić paszczę. Odległości niektórych par punktów hipopotama wtedy wzrastają; odległości innych – maleją. Rozdziawić paszczy tak, by odległość żadnej pary jego punktów nie zmalała, hipopotam nie może. Intuicyjnie jest to w miarę jasne – my jednak, by nabrać stuprocentowej pewności, że istotnie tak jest, rozwiążemy poniższe

Zadanie o hipopotamie. *Niech K będzie zbiorem zwartym metrycznym z metryką $\rho(\cdot,\cdot)$. Wykazać, że dowolne przekształcenie $f : K \to K$, spełniające dla wszystkich $x, y \in K$ warunek $\rho(f(x), f(y)) \geq \rho(x, y)$, jest izometrią.*

Jako pierwsi zadanie to rozwiązali zapewne Ehrenpreis i Hurewicz. Rozwiązanie przytoczone niżej dobrze ilustruje siłę i elegancję metod wariacyjnych.

Zacznijmy od przypomnienia ważnej własności zbiorów zwartych metrycznych. Powiemy, że podzbiór $\mathcal{E}$ przestrzeni metrycznej X (czyli zbioru z metryką $\rho(\cdot,\cdot)$) jest *ε-siecią*, jeżeli dla dowolnego $x \in X$ istnieje taki $y \in \mathcal{E}$, że $\rho(x, y) \leq \varepsilon$. Okazuje się, że jeżeli X jest zbiorem zwartym, to dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje skończona ε-sieć zawarta w X.

Załóżmy na początek, że f jest „na". Z treści zadania wynika, oczywiście, różnowartościowość f, więc istnieje wtedy przekształcenie $g : K \to K$ odwrotne do f, które jest również „na", o tej własności, że dla dowolnych $x, y \in X$ zachodzi nierówność $\rho\big(g(x), g(y)\big) \leq \rho(x, y)$. Wykażemy, że g jest izometrią.

Wybierzmy dwa ustalone punkty $p_1, p_2 \in K$ oraz liczbę $\varepsilon > 0$. Spośród wszystkich ε-sieci w K wybierzmy taką sieć $\mathcal{E}$, która spełnia warunek

$$(*) \qquad \text{nie istnieje } \varepsilon\text{-sieć } \mathcal{E}', \text{ taka, że } \sum_{x,y\in\mathcal{E}'} \rho(x, y) < \sum_{x,y\in\mathcal{E}} \rho(x, y) - \varepsilon.$$

Oczywiście, jest to możliwe (Czytelnik zechce sobie przypomnieć definicję kresu dolnego).

Zauważmy teraz, że $g(\mathcal{E})$ jest również ε-siecią. Istotnie, jeżeli $y \in K$, to istnieje takie $x \in \mathcal{E}$, że $\rho(x, f(y)) \leq \varepsilon$. Stąd $\rho\big(g(x), y\big) = \rho\big(g(x), g(f(y))\big) \leq \leq \rho\big(x, f(y)\big) \leq \varepsilon$. Ponieważ $g(x) \in g(\mathcal{E})$, więc $g(\mathcal{E})$ jest ε-siecią.

Na mocy warunku $(*)$ jest więc $\sum_{x,y\in\mathcal{E}} \rho\big(g(x), g(y)\big) \geq \sum_{x,y\in\mathcal{E}} \rho(x, y) - \varepsilon$. Stąd, dla dowolnych punktów $a, b \in \mathcal{E}$ dostajemy

$$\rho\big(g(a), g(b)\big) \geq \rho(a, b) + \sum_{\substack{x,y\in\mathcal{E}\\(x,y)\neq(a,b)}} \Big(\rho(x, y) - \rho\big(g(x), g(y)\big)\Big) - \varepsilon \geq$$
$$\geq \rho(a, b) - \varepsilon.$$

Ponieważ $\mathcal{E}$ jest ε-siecią, istnieją takie $a, b \in \mathcal{E}$, że $\rho(p_1, a) \leq \varepsilon$ oraz $\rho(p_2, b) \leq \varepsilon$. Mamy więc, korzystając dwukrotnie z nierówności trójkąta,

$$\begin{aligned}\rho\big(g(p_1), g(p_2)\big) &\geq \rho\big(g(a), g(b)\big) - \rho\big(g(p_1), g(a)\big) - \rho\big(g(p_2), g(b)\big) \geq \\ &\geq \rho(a, b) - \varepsilon - \rho(p_1, a) - \rho(p_2, b) \geq \\ &\geq \rho(p_1, p_2) - \rho(p_1, a) - \rho(p_2, b) - \varepsilon - \rho(p_1, a) - \rho(p_2, b) \geq \\ &\geq \rho(p_1, p_2) - 5\varepsilon.\end{aligned}$$

Ponieważ ε było wybrane dowolnie, więc $\rho\big(g(p_1), g(p_2)\big) \geq \rho(p_1, p_2)$. Razem z założeniem zadania daje to ostatecznie równość $\rho\big(g(p_1), g(p_2)\big) = \rho(p_1, p_2)$.

Jak teraz pozbyć się dodatkowego założenia, że f jest „na"? Dopomoże nam w tym pojęcie pokrewne do ε-sieci. Nazwiemy podzbiór A przestrzeni metrycznej *ε-rozdzielonym*, jeżeli każde dwa jego różne punkty są odległe o co najmniej ε. W dowolnej przestrzeni metrycznej zwartej istnieje dla dowolnego $\varepsilon > 0$ największy (tzn. taki, że nie istnieje podzbiór ε-rozdzielony o większej liczbie elementów) podzbiór ε-rozdzielony (dlaczego?).

Rozwiązanie zadania M 844. Dowodzimy przez indukcję. Dla $n = 3$ mamy planety A_1, A_2, A_3. Jeśli np. $|A_1A_2| < |A_2A_3| < |A_3A_1|$, to A_3 jest nieobserwowana. Załóżmy, że $n > 3$. Niech A_{n-1}, A_n będą takimi planetami, że $|A_{n-1}A_n| = \min_{i\neq j} |A_iA_j|$. Jeśli astronom znajdujący się na jednej z planet $A_1, \ldots, A_{n-2}$ obserwuje planetę A_{n-1} lub A_n, to na planety $A_1, \ldots, A_{n-2}$ nie starcza astronomów (bo A_{n-1} i A_n obserwują siebie nawzajem). Jeśli natomiast żaden z astronomów z $A_1, \ldots, A_{n-2}$ nie obserwuje ani planety A_{n-1}, ani A_n, to stosujemy założenie indukcyjne do $A_1, \ldots, A_{n-2}$.

Wykażemy, że $f(K)$ jest gęstym podzbiorem K. W przeciwnym razie dla pewnego $\varepsilon > 0$ kula o środku w pewnym punkcie $a \in K$ i promieniu ε byłaby rozłączna z $f(K)$. Innymi słowy: $\rho(a,x) > \varepsilon$ dla każdego $x \in f(K)$. Niech teraz A będzie maksymalnym zbiorem ε-rozdzielonym zawartym w K. Ponieważ f nie zmniejsza odległości, $f(A)$ jest również zbiorem ε-rozdzielonym. Lecz wówczas także $f(A) \cup \{a\}$ jest ε-rozdzielony i ma więcej elementów niż A. Sprzeczność.

Zauważmy teraz, że na zbiorze $f(K)$ można określić funkcję $g_0 : f(K) \to K$ odwrotną do f. Funkcja g_0 jest jednostajnie ciągła, co więcej, $\rho(g_0(x), g_0(y)) \leq \rho(x,y)$, dla $x, y \in f(K)$. Ma ona zatem rozszerzenie ciągłe $g : K \to K$, takie, że $\rho\big(g(x), g(y)\big) \leq \rho(x,y)$, dla $x, y \in K$ (dlaczego?). Oczywiście $g(K) = K$ (a nawet $g_0\big(f(K)\big) = K$). Zatem, postępując tak, jak w pierwszej części dowodu dostaniemy, że $\rho\big(g(x), g(y)\big) = \rho(x,y)$. Co za tym idzie, f jest izometrią.

Jeszcze dwie uwagi. Po pierwsze, dowód byłby nieco prostszy, gdybyśmy wiedzieli, że istnieje ε-sieć $\mathcal{E}$, dla której wielkość $\sum\limits_{x,y\in\mathcal{E}} \rho(x,y)$ jest najmniejsza. Rzeczywiście jest to prawda, ale po dołączeniu (nietrudnego) dowodu tego faktu cały tekst niepotrzebnie by się wydłużył.

Po drugie, możemy pokusić się o dowód faktu nieco ogólniejszego. Załóżmy, że K, zamiast samemu być zbiorem zwartym, jest jedynie gęstym podzbiorem zbioru zwartego metrycznego (bardziej fachowo mówimy wtedy, że K ma zwarte uzupełnienie lub jest całkowicie ograniczony – w przypadku podzbiorów przestrzeni euklidesowej oznacza to tyle, że K jest ograniczony). Już to skromniejsze założenie implikuje tezę naszego zadania. Istotnie, niech L będzie takim zwartym nadzbiorem K, że K jest jego gęstym podzbiorem. Wówczas na zbiorze $f(K)$ można określić funkcję $g_0 : f(K) \to K$ odwrotną do f, jednostajnie ciągłą – spełniającą warunek $\rho(g_0(x), g_0(y)) \leq \rho(x,y)$, dla $x, y \in f(K)$. Można więc rozszerzyć g_0 do funkcji ciągłej g przekształcającej domknięcie $\overline{f(K)}$ zbioru $f(K)$ w zbiór L, dla której $\rho\big(g(x), g(y)\big) \leq \rho(x,y)$, dla $x, y \in \overline{f(K)}$. Ale $\overline{f(K)} = L$, tzn. $f(K)$ jest gęstym podzbiorem L. Dowód tego faktu jest analogiczny jak w przypadku K zwartego. Z naszego zadania wynika więc, że g jest izometrią zbioru L, a co za tym idzie, $f = g^{-1}_{|K}$ jest izometrią zbioru K.

Jest jednak spora różnica między przypadkiem, gdy zbiór K jest zwarty, a przypadkiem, gdy K jest jedynie gęsty w pewnym zbiorze zwartym. W tym drugim przypadku f, mimo że jest izometrią, nie musi być „na". Można się o tym przekonać biorąc np. liczbę α niewspółmierną z π oraz podzbiór K okręgu $x^2 + y^2 = 1$ złożony z punktów postaci $(\cos n\alpha, \sin n\alpha)$, dla $n = 0, 1, 2, \ldots$ Wówczas obrót o kąt α jest izometrią zbioru K, ale nie jest „na" – punkt $(1,0)$ nie jest obrazem żadnego innego punktu. Obrót f o kąt $m\alpha$ jest izometrią K o tej własności, że $K \setminus f(K)$ ma m elementów. W przestrzeni o większej liczbie wymiarów można zbudować znacznie ciekawsze przykłady. Istnieje np. taki podzbiór gęsty A dwuwymiarowej sfery $\mathbf{S}^2$ oraz izometrie $f, g : A \to A$, że zbiory $f(A)$ i $g(A)$ są rozłączne oraz $f(A) \cup g(A) = A$. Na tym opiera się tzw. paradoksalny rozkład kuli Banacha–Tarskiego. No, ale to już zupełnie inna historia.

Rozwiązanie zadania M 845.

Niech k będzie danym kołem, na którym opisany jest n-kąt M, F jest n-kątem foremnym opisanym na k, a K kołem opisanym na F. Niech $S_1, S_2, \ldots, S_n$ będą odcinkami kołowymi w K, wyznaczonymi przez proste zawierające kolejne boki n-kąta M. Wszystkie one mają równe pola. Niech ponadto $S_{i,j} = S_i \cap S_j$. Oznaczmy przez $|A|$ pole figury A. Mamy

$$|M \cap K| = |K| - (|S_1| + |S_2| + \cdots + |S_n|) + (|S_{1,2}| + |S_{2,3}| + \cdots + |S_{n-1,n}| + |S_{n,1}|) \geq$$
$$\geq |K| - n|S_1| = |F|,$$

przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $|S_{1,2}| = \ldots = |S_{n,1}| = 0$, czyli gdy M jest foremny.