5/98 (5)

Γ-limatias $_{n\to\infty}$

CYFROMANIA (5)

Wykorzystując zdobyte doświadczenie spróbujmy odpowiedzieć na pytanie: Jakie końcówki mogą mieć potęgi niektórych liczb większych od 3? Czego ciekawego można sobie od nich zażyczyć?

Potęgi czwórki.

Potęgi czwórki są to potęgi dwójki, które... chwila zastanowienia... dają resztę z dzielenia przez 5 równą 1 lub 4. Stąd od razu dostajemy charakteryzację:

WNIOSEK: Liczba $1 < r < 10^k$ może być k-cyfrową końcówką potęgi czwórki (o wykładniku nie mniejszym niż $\frac{k}{2}$) wtedy i tylko wtedy, gdy r dzieli się przez 2^k oraz daje resztę 1 lub 4 przy dzieleniu przez 5.

Potęgi piątki.

Reszta z dzielenia 5^n przez 5^k jest równa zeru, jeśli tylko $n \geq k$. Ciekawą rzeczą jest więc zbadanie przy ustalonym k ciągu reszt z dzielenia 5^n przez 2^k. Okresy O_k takich ciągów reszt wynoszą: $O_1 = O_2 = 1$ oraz $O_k = 2^{k-2}$ dla $k \geq 3$. Zatem potęgi piątki o dużym wykładniku dopuszczają:

1 końcówkę 1-cyfrową (jest to 5);

1 końcówkę 2-cyfrową (jest to 25);

2 końcówki 3-cyfrowe (są to 125 i 625);

4 końcówki 4-cyfrowe (są to 3125, 8125, 0625 i 5625).

W każdym następnym przypadku mamy 2 razy więcej możliwych końcówek. Końcówka k-cyfrowa ($k \geq 2$) „pamięta" resztę z dzielenia $(k+1)$-szej cyfry przez 5 od końca – można ją więc uzupełnić do końcówki $(k+1)$-cyfrowej na 2 sposoby.

Końcówka k-cyfrowa musi dawać przy dzieleniu przez 2^k jedną z 2^{k-2} dopuszczalnych reszt. Możliwych reszt nieparzystych jest 2^{k-1}, a zatem dobra jest (średnio) co druga. Chwila zastanowienia pozwala scharakteryzować te, które są dopuszczalne, dając:

WNIOSEK: Liczba $1 < r < 10^k$ może być k-cyfrową końcówką potęgi piątki o dużym wykładniku wtedy i tylko wtedy, gdy r dzieli się przez 5^k oraz daje resztę 1 przy dzieleniu przez 4.

Potęgi szóstki.

Duże potęgi szóstki dzielą się przez 2^k. Przy dzieleniu przez 5^1 dają resztę 1. Zatem okres O_k ciągu reszt z dzielenia 6^n przez 5^k wynosi 5^{k-1}.

WNIOSEK: Liczba $1 < r < 10^k$ może być k-cyfrową końcówką potęgi szóstki o dużym wykładniku wtedy i tylko wtedy, gdy r dzieli się przez 2^k oraz ma ostatnią cyfrę 6.

Tak więc idąc od końca mamy w potędze szóstki: cyfrę 6, cyfrę nieparzystą i dalej na k-tym miejscu cyfrę, której parzystość jest wyznaczona przez końcówkę $(k-1)$-cyfrową.

Potęgi siódemki.

Dzielenie 7^n przez 2^k daje reszty tworzące ciąg okresowy o okresie O_k danym wzorami:

$$O_1 = 1,$$
$$O_2 = O_3 = O_4 = 2,$$
$$O_k = 2^{k-3} \quad \text{dla } k \geq 5.$$

Okres P_k ciągu reszt z dzielenia 7^n przez 5^k wynosi

$$P_1 = P_2 = 4,$$
$$P_k = 4 \cdot 5^{k-2} \quad \text{dla } k \geq 3.$$

Długość okresu ciągu reszt z dzielenia 7^n przez 10^k, a tym samym ilość dopuszczalnych końcówek k-cyfrowych, wynosi $R_k = NWW(O_k, P_k)$ i jest dana wzorami:

$R_1 = R_2 = 4,$

$R_3 = 4 \cdot 5 = 20,$

$R_4 = 4 \cdot 5^2 = 100,$

$R_5 = 4 \cdot 5^3 = 500$ (są to końcówki podzielne przez 800 z resztą 1, 7, 49 lub 343),

$R_6 = 8 \cdot 5^4 = 5000$

i ogólnie $R_k = 2^{k-3} \cdot 5^{k-2} = 5 \cdot 10^{k-3}$ dla $k \geq 6$.

Widzimy, że $R_k = 10 \cdot R_{k-1}$ dla $k \geq 6$. Oznacza to, że jeżeli r_5 jest dopuszczalną końcówką 5-cyfrową, to $r_6 = 10^5 c + R_5$ jest dopuszczalną końcówką 6-cyfrową dla $c = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, czyli szóstą cyfrę od końca możemy wybierać dowolnie. To samo dotyczy k-tej ($k \geq 6$) cyfry od końca.

JWR

MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (2″)

Wyjaśnienie oszustwa (2′) – *tym razem poprawne*:

$\sqrt{3-\sqrt{8}} = \sqrt{2} - 1$, skąd $w = \sqrt{3-\sqrt{8}} - \sqrt{2} = -1$, a więc w jest liczbą wymierną!

Oszustwo polegało na dzieleniu przez $w + 1 = 0$.

JWR

MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (4)

ZADANIE: Na sferze o promieniu 10 opisano czworościan o polu powierzchni 1200. Obliczyć objętość tego czworościanu.

Rozwiązanie: Wielościan o polu powierzchni P opisany na sferze o promieniu R ma objętość $V = \frac{P \cdot R}{3}$, co w naszym przypadku jest równe 4000.

JWR

Korespondencję do Γ-limatiasu prosimy kierować pod adresem:
Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCŁAW; e-mail: jwr@ math.uni.wroc.pl