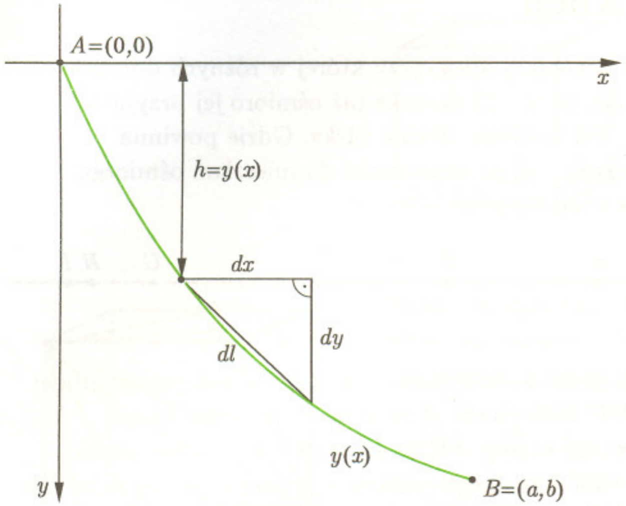
Brachistochrona

Trzysta dwa lata temu, w czasopiśmie *Acta Eruditorum*, Jan Bernoulli zapytał, jaki kształt ma krzywa (od greckich *brachist* – najkrótszy i *chronos* – czas nazywana brachistochroną), po której ruch z punktu A do punktu B pod wpływem siły grawitacji trwa najkrócej.

Aby, podobnie jak sam Bernoulli, Newton, czy Leibniz, odpowiedzieć na powyższe pytanie, wprowadźmy układ współrzędnych tak, jak to pokazuje rysunek.



Czas, w jakim zsuwający się punkt pokonuje fragment krzywej o długości dl, jest równy $\frac{dl}{v}$. Mamy też $dl = (1 + y'(x)^2)^{1/2}dx$, a z zasady zachowania energii wynika, że $mgh = \frac{1}{2}mv^2$, czyli, przy oznaczeniach z rysunku, prędkość v spełnia w każdej chwili równanie $v^2 = 2gy(x)$. Całkowity czas ruchu wzdłuż krzywej $y(x)$ to całka $\int \frac{dl}{v}$, a zatem ostatecznie

$$T[y] = \int_0^a f(y(x), y'(x))\, dx\,, \tag{1}$$

gdzie $f(y, y') = \frac{1}{\sqrt{2g}} \left(\frac{1 + y'^2}{y}\right)^{1/2}$. Zagadnienie brachistochrony polega więc na znalezieniu takiej funkcji różniczkowalnej $y : [0, a] \to \mathbb{R}$, spełniającej warunki $y(0) = 0$, $y(a) = b$, dla której całka $T[y]$ ma najmniejszą wartość. Oto szkic rozwiązania.

Krok 1: równanie Eulera–Lagrange'a. Warunek konieczny na to, by funkcja y była minimum funkcjonału T, ma postać

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0\,. \tag{2}$$

Dowód tego faktu można znaleźć w dowolnym podręczniku rachunku wariacyjnego.

Równanie (2) jest równaniem różniczkowym zwyczajnym drugiego rzędu. Jego postać zależy od funkcji f; w naszej sytuacji, dla $f(y, y') = \text{const} \cdot \sqrt{(1 + y'^2)/y}$, jest to dość paskudne równanie nieliniowe. Żeby niepotrzebnie nie straszyć Czytelników, nie będziemy go w ogóle wypisywać.

Krok 2: pierwsze całkowanie. Gdy funkcja f nie zależy w jawny sposób od x, to wówczas równanie Eulera–Lagrange'a można natychmiast jeden raz scałkować i zamiast (2) napisać

$$f - y'\frac{\partial f}{\partial y'} = \text{const}\,. \tag{3}$$

(Różniczkując lewą stronę powyższego równania względem x, dostajemy lewą stronę równania (2) pomnożoną przez y'.) Po mechanicznym obliczeniu pochodnej f względem zmiennej y' i doprowadzeniu równania do najprostszej postaci otrzymamy

$$y(1 + y'^2) = c\,. \tag{4}$$

Krok 3: drugie całkowanie. Równanie (4) można już brutalnie scałkować. Żeby się nadmiernie nie męczyć, dokonamy podstawienia $y' = \operatorname{tg}\theta$ (Czytelnik zechce się zastanowić, jaki jest jego sens geometryczny). Wówczas $1 + y'^2 = 1 + \operatorname{tg}^2\theta = 1/\cos^2\theta$, a zatem mamy $y = c\cos^2\theta$. Obie strony tej równości zróżniczkujemy teraz względem zmiennej x – po to, by również x wyrazić jako funkcję θ. Dostaniemy

$$\operatorname{tg}\theta = y' = -2c\theta'\cos\theta\sin\theta\,.$$

Ponieważ $2\cos^2\theta = 1 + \cos 2\theta$, więc

$$1 = -2c\theta'\cos^2\theta = -c(1 + \cos 2\theta)\theta'\,.$$

Zatem, $x + c_1 = -c(\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta)$. Otrzymane równania, po podstawieniu $\alpha = \pi - 2\theta$, mają postać

$$2y = c(1 - \cos\alpha)\,,$$
$$2(x + c_2) = c(\alpha - \sin\alpha)$$

i są parametrycznymi równaniami cykloidy, krzywej, którą zakreśla punkt okręgu toczącego się bez poślizgu po prostej.

Na razie wykonaliśmy taką mniej więcej pracę umysłową, jak uczeń, którego zapytano o minima lokalne funkcji $g(x) = x^3$, a on z radością odpowiada: *pochodna tej funkcji, $g'(x) = 3x^2$, znika dla $x = 0$, więc tam właśnie jest minimum.* Sprawdzenie, że funkcjonał T w ogóle przyjmuje najmniejszą wartość, wymaga jednak wiedzy z zakresu analizy funkcjonalnej; nie będziemy go więc tu Czytelnikom prezentować.

Na zakończenie warto powiedzieć, że zadanie Jana Bernoulliego o brachistochronie to początek rachunku wariacyjnego, bogatej gałęzi matematyki, która w dwudziestym wieku przeżywa burzliwą drugą młodość, po części ze względu na zastosowania w fizyce (np. cząstek elementarnych), a po części z powodów czysto matematycznych. Głębsze wnikanie w tę historię może być raczej motywem długich intymnych kontaktów z nauką niż tematem krótkiego artykułu w *Delcie*.

P.S.