Uogólnienia zadania Steinhausa o liczbie 145

Józef KWIATKOWSKI, Andrzej NOWICKI

Hugo Steinhaus w książeczce *100 zadań* podaje (jako zadanie do udowodnienia) następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1. *Napiszmy dowolną liczbę naturalną w dziesiątkowym układzie pozycyjnym i obliczmy sumę kwadratów cyfr tej liczby. Z otrzymaną liczbą zróbmy to samo i postępujmy w ten sam sposób dalej. Jeżeli ten proces nie doprowadzi nas do jedynki (po czym, oczywiście, jedynka będzie powtarzać się bezustannie), to doprowadzi na pewno do liczby* 145, *po czym wystąpi cykl*

$$145,\ 42,\ 20,\ 4,\ 16,\ 37,\ 58,\ 89,$$

który będzie się powtarzać.

Startując, na przykład, od liczby 5 699 999 i powtarzając opisaną w twierdzeniu procedurę, otrzymamy ciąg:

$$5\,699\,999,\ 466,\ 88,\ 128,\ 69,\ 117,\ 51,\ 26,\ 40,\ 16,\ 37,\ 58,\ 89,\ 145.$$

Startując natomiast od liczby 688 888 mamy:

$$688\,888,\ 356,\ 70,\ 49,\ 97,\ 130,\ 10,\ 1.$$

Twierdzenie to można udowodnić w następujący sposób.

Dowód. Niech n będzie daną liczbą naturalną. Niech k będzie liczbą cyfr liczby n oraz niech n' oznacza sumę kwadratów cyfr liczby n. Jeśli $k \geq 4$, to $k < 10^{k-3}$ i wówczas:

$$n' \leq 9^2 k = 81k < 100k < 10^2 \cdot 10^{k-3} = 10^{k-1}.$$

Jeśli więc $k \geq 4$, to liczba cyfr liczby n' jest mniejsza od liczby cyfr liczby n. Wystarczy zatem wykazać, że badaną własność mają wszystkie liczby naturalne mniejsze od 1000. Jeśli $n < 1000$, to $n' \leq 999' = 3 \cdot 9^2 = 243$. Możemy więc ograniczyć się tylko do liczb naturalnych n mniejszych lub równych 243. Z łatwością sprawdzamy, że wszystkie takie liczby spełniają tezę. ■

Podobne twierdzenie można udowodnić dla sumy sześcianów. Spójrzmy najpierw na przykłady.

$$\begin{aligned} 1^3 + 5^3 + 3^3 &= 153,\\ 3^3 + 7^3 + 0^3 &= 370,\\ 3^3 + 7^3 + 1^3 &= 371,\\ 4^3 + 0^3 + 7^3 &= 407. \end{aligned}$$

Oznaczmy przez $s(n)$ sumę sześcianów cyfr liczby naturalnej n. Z przykładów tych wnioskujemy, że istnieją 4 liczby naturalne n, różne od 1, spełniające równość $s(n) = n$. Liczbami tymi są: 153, 370, 371 oraz 407. Można wykazać, że innych liczb o takiej własności nie ma. Istnieją dokładnie dwie pary (a, b) liczb naturalnych spełniających równości: $s(a) = b$, $s(b) = a$. Są to pary: $(136, 244)$ i $(919, 1459)$. Istnieją ponadto (dokładnie dwie) trójki (a, b, c), takie, że $s(a) = b$, $s(b) = c$ i $s(c) = a$. Trójkami tymi są: $(55, 250, 133)$ oraz $(160, 217, 352)$.

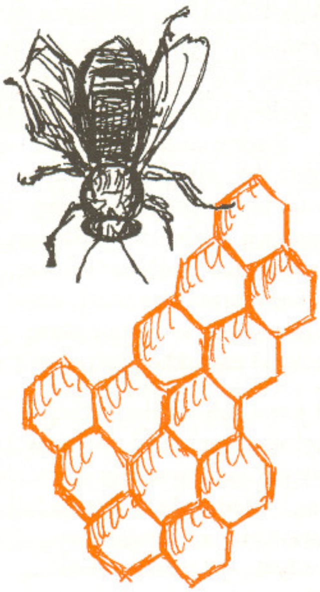
Trójki i pary, o których mowa obok, są jednoznaczne z dokładnością do permutacji cyklicznych – np. trójek $(55, 250, 133)$ i $(250, 133, 55)$ nie uważamy za różne.

Twierdzenie 2. *Napiszmy dowolną liczbę naturalną w dziesiątkowym układzie pozycyjnym i obliczmy sumę sześcianów cyfr tej liczby. Z otrzymaną liczbą zróbmy to samo i postępujmy w ten sam sposób dalej. Proces ten doprowadzi nas zawsze do jednej z liczb:* 1, 55, 136, 153, 160, 370, 371, 407, 919.

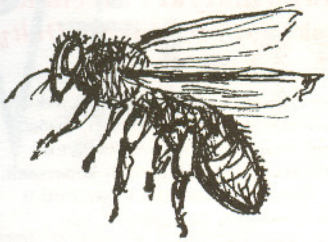
Dowód. Niech n będzie daną liczbą naturalną i niech k będzie liczbą cyfr liczby n. Jeśli $k \geq 5$, to $k < 10^{k-4}$ i wówczas:

$$s(n) \leq 9^3 k < 10^3 k < 10^3 \cdot 10^{k-4} = 10^{k-1}.$$

Jeśli więc $k \geq 5$, to liczba cyfr liczby $s(n)$ jest mniejsza od liczby cyfr liczby n. Wystarczy zatem wykazać, że badaną własność mają wszystkie liczby naturalne mniejsze od 10 000. Jeśli $n < 10\,000$, to $s(n) \leq s(9999) = 4 \cdot 9^3 = 2916$.



Pan Józef Kwiatkowski, współautor artykułu, jest nauczycielem matematyki w Raciążu.

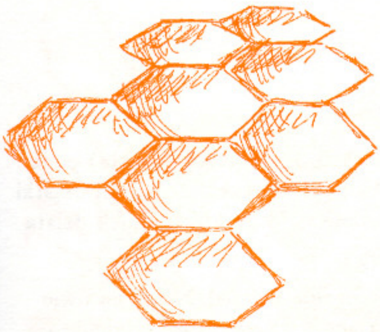


Możemy więc ograniczyć się tylko do liczb naturalnych n mniejszych lub równych 2916. Z łatwością sprawdzamy (na przykład za pomocą komputera), że wszystkie takie liczby spełniają tezę. ■

Następne dwa twierdzenia dotyczą sum czwartych i piątych potęg.

Twierdzenie 3. *Proces polegający na obliczaniu sumy czwartych potęg cyfr liczby naturalnej doprowadzi nas zawsze do jednej z liczb:* 1, 1138, 1634, 2178, 8208, 9474.

Twierdzenie 4. *Proces polegający na obliczaniu sumy piątych potęg cyfr liczby naturalnej doprowadzi nas zawsze do jednej z liczb:* 1, 244, 4150, 4151, 8294, 8299, 9044, 9045, 10 933, 24 584, 54 748, 58 618, 89 883, 92 727, 93 084, 194 979.



Dowody są podobne do dowodów twierdzeń 1 i 2; pozostawiamy je jako zadanie dla Czytelników. Z dowodów tych wynikają następujące interesujące równości.

$$1^4+6^4+3^4+4^4=1634$$
$$8^4+2^4+0^4+8^4=8208$$
$$9^4+4^4+7^4+4^4=9474$$

$$4^5+1^5+5^5+0^5=4150$$
$$4^5+1^5+5^5+1^5=4151$$
$$5^5+4^5+7^5+4^5+8^5=54748$$
$$9^5+2^5+7^5+2^5+7^5=92727$$
$$9^5+3^5+0^5+8^5+4^5=93084$$
$$1^5+9^5+4^5+9^5+7^5+9^5=194979$$

Innych równości tego typu nie ma.

Załóżmy teraz, że $f(x)=a_s x^s + a_{s-1}x^{s-1}+\cdots+a_1x^1+a_0$ jest wielomianem jednej zmiennej x o nieujemnych współczynnikach całkowitych. Za pomocą tego wielomianu definiujemy funkcję F, działającą ze zbioru liczb naturalnych do zbioru liczb naturalnych. Robimy to w następujący sposób. Niech n będzie daną liczbą naturalną. Niech $c_1, c_2, \ldots, c_k$ będą cyframi (w dziesiątkowym układzie pozycyjnym) liczby n. Wówczas przyjmujemy:

$$F(n)=f(c_1)+f(c_2)+\cdots+f(c_k).$$

Np. jeśli $f(x)=3x^2+9$, to $F(201)=f(2)+f(0)+f(1)=21+9+12=42$.

Napiszmy dowolną liczbę naturalną n. Obliczmy $F(n)$. Z otrzymaną liczbą zróbmy to samo i postępujmy w ten sam sposób dalej. Otrzymamy wówczas ciąg:

$$n,\ F(n),\ F(F(n)),\ F(F(F(n))),\ \cdots.$$

Każdy ciąg takiej postaci nazwijmy f-*ciągiem*. Dla przykładu następujące dwa ciągi są f-ciągami dla $f(x)=3x^2+9$.

201, 42, 78, 357, 276, 294, 330, 81, 213, 69, 369, 405, 150, 105, 105, ...

899, 741, 225, 126, 150, 105, 105, ...

Pierwszy z tych ciągów powstał dla $n=201$, a drugi dla $n=899$. W jednym i drugim ciągu pojawiła się liczba 105, która powtarza się bezustannie. To nie jest przypadek. Okazuje się, że jeśli $f(x)=3x^2+9$, to w każdym f-ciągu pojawi się liczba 105. Łatwo to udowodnić. Dowód jest podobny do dowodów twierdzeń 1 i 2. Widzimy więc, że istnieją takie wielomiany $f(x)$, że w każdym f-ciągu występuje zawsze ta sama liczba naturalna m_f. Kilka przykładów takich wielomianów $f(x)$ wraz z ich liczbą m_f przedstawiamy obok.

$f(x)$	m_f
$2x+2$	14
$3x$	27
$3x+1$	26
$3x+2$	25
$6x$	54
$6x+5$	52
$2x^2+2x+1$	191
$3x^2+9$	105
$3x^2+3x+4$	162
$3x^2+6x+5$	273
$5x^2+5x$	10
$6x^2+6x+6$	426
x^3+x+8	228
x^3+x^2	152
x^3+x^2+4x+7	33
x^3+2x^2+3x+5	596
x^3+2x^2+7x+1	647
x^3+2x^2+7x+7	185

Do tej pory rozważaliśmy tylko dziesiątkowy układ pozycyjny. Przy definiowaniu f-ciągów wykorzystaliśmy funkcję F zdefiniowaną za pomocą cyfr układu dziesiętnego. Podobną funkcję F możemy zdefiniować wykorzystując cyfry dowolnego ustalonego systemu pozycyjnego. Otrzymamy wówczas nowe f-ciągi, które również mają ciekawe własności. Jeśli, na przykład, $f(x)=8x^2+5x+7$ i ustalonym sytemem pozycyjnym jest system trójkowy, to w każdym f-ciągu występuje liczba, której zapisem dziesiętnym jest 145. Jeśli natomiast $f(x)=2x^2+5$ i ustalonym systemem jest system siódemkowy, to w każdym f-ciągu występuje 81 lub 25 lub 145.