Satysfakcja Lakatosa

Jan BARANOWSKI

Actual history is frequently a caricature of its rational reconstructions
Lakatos [1], str. 84

Tekst *Liczby i wielościany* w *Delcie* 11/1997 prowokuje mnie do napisania niniejszego. Nie mam złośliwych zamiarów, namawiam do refleksji nad trwałością i ostatecznością wiedzy matematycznej. A że meritum jest dostępne nawet laikowi, tym lepiej.

Imre Lakatos w pięknej książce [1] opisał historię rozwoju pojęcia wielościanu i zmagań paru pokoleń matematyków ze wzorem Eulera. Posłużyła mu ona jako ilustracja jego punktu widzenia na rozwój całej matematyki. Rozwój, który nie jest ani liniowy, ani konsekwentny.

Chodzi o wzór $S - K + W = 2$, gdzie S – liczba ścian, K – liczba krawędzi, W – liczba wierzchołków.

Czytając książkę można się przekonać, jak od połowy XVIII wieku do końca wieku XIX wielokrotnie odkrywano te same fakty. Niejeden widząc coś nowego, niezgodnego z jego wiedzą (i wiarą!) stwierdzał, że to monstrum, że to nie istnieje. Reakcje na kontrprzykłady burzące dotychczasowe poglądy były (i są) różne. Lakatos scharakteryzował typy tych reakcji. Tego jednak lepiej szukać w samej książce.

Do czasu ustalenia założeń istotnych dla wzoru Eulera starano się sobie radzić przez zanegowanie istnienia wielościanów niejednospójnych, przez poprawianie definicji wielościanu, potem poprawianie wzoru. Ktoś nawet stwierdził, że wielościanem może być tylko to, co spełnia wzór...

Żeby wielościan nie chciał spełniać wzoru Eulera, nie wystarczy jego niewypukłość; wzór spełnia każdy wielościan, który, jako powierzchnię, da się bez łatania i rozrywania „nadmuchać" podobnie do piłki lub zwykłego balonika, w odróżnieniu od np. dętki rowerowej; taki „nadmuchiwalny" wielościan jest jednospójny.

Historia opisywana przez Lakatosa kończy się dowodem wzoru sformułowanym przez Poincarégo i stosującym się do wielowymiarowych uogólnień.

Przed laty, dzięki krótkiej notatce w *Delcie*, trafiłem na „ciąg dalszy" opisywanych przez Lakatosa przygód umysłu. Wspomniano tam czternastą bryłę archimedesową powstałą przez obrót o 45° części znanej już bryły (*sześcio-ośmiościanu rombowego małego* według nazewnictwa ustalonego przez Romana Dudę podczas tłumaczenia książki *Modele matematyczne*).

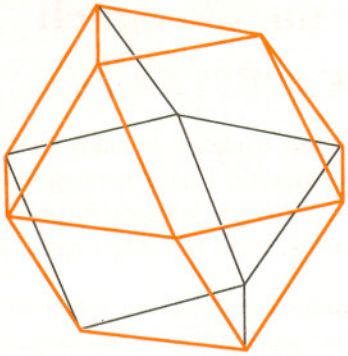
Ta nowa bryła jest znakomitym nowym przykładem dla Lakatosa.

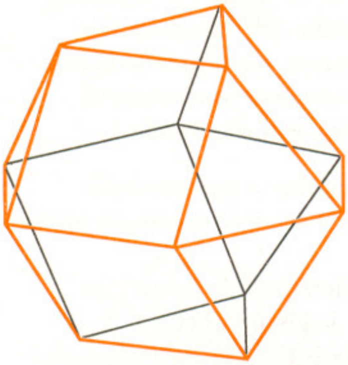
Bryła archimedesowa, wielościan półforemny – wielościan, którego wszystkie ściany są foremne, a wszystkie wierzchołki mają przystające naroża. W dostępnej literaturze twierdzi się, że poza dwoma nieskończonymi ciągami graniastosłupów i graniastosłupów skręconych (zwanych czasem antygraniastosłupami: wielokątne podstawy połączone są szlaczkiem trójkątów przypominającym wzór z czapki generalskiej) jest ich dokładnie 13.

Definicja jest dobra, dopóki nie pojawi się coś nowego burzącego dotychczasowy obraz świata. Wówczas definicję się poprawia. Tak zrobili Ball i Coxeter [2]. Piszą oni, że przy próbach skonstruowania modelu tej starszej bryły J.C.P. Miller (*Philosophical Transactions of the Royal Society*, 1930, ser. A, vol. CCXXIX str. 336) przypadkiem odkrył ***pseudo-sześcio-ośmiościan rombowy***. Stało się to więc nie później niż w roku 1930. Dalej stwierdzają, że ta ostatnia bryła jest „tylko lokalnie półforemna", ale w sensie ogólnym nie, albowiem „cały wielościan powinien wyglądać jednakowo, jeśli patrzeć na niego kolejno w kierunku każdego wierzchołka". Pierwszy raz w życiu czytałem takie „uściślenie" definicji wielościanu półforemnego. W radzieckim wydaniu [2'] jest na ten temat przypis, w którym tłumacz sugeruje, że jednak brył półforemnych jest 14, a tę jedną można spośród archimedesowych usunąć tylko przez postawienie ścisłych warunków co do symetrii. W ten sposób Ball i Coxeter zamierzali anulować istnienie nowej bryły archimedesowej, rosyjski tłumacz zrobił kroczek ku uznaniu faktu, jednak też myślał o ratowaniu starych poglądów. Przypomina to nieco (nieznaną zapewne młodszym Czytelnikom) piosenkę Wojciecha Młynarskiego o szachach...

Co do symetrii, bryła znana od dawna ma wszystkie osie i płaszczyzny odziedziczone po sześcianie lub ośmiościanie, z których można ją wyciąć, bryła „nowa" – przypomina bardziej graniastosłup. Te różnice nie są widoczne na pierwszy rzut oka.

Mogłem przy okazji różnych zajęć wypytywać dzieci 10-letnie, 13-letnie i dorosłych, czy widzą różnice między tymi dwiema bryłami. Rozmawiając ze





mną mieli zawsze modele tych obu brył w zasięgu ręki, mogli je obracać. Około połowy moich rozmówców **żadnej różnicy** nie widziało.

Sądzę że ich oczom wystarczyły przystające naroża (trzy kwadraty i jeden trójkąt) i ogólne wrażenie tej samej „wypukłości". Młodsze dzieci mówiły wręcz o kulistości.

Tu chciałbym zwrócić uwagę na to, że „przystające naroża" oznacza więcej niż „te same wielokąty". Spróbujmy podobną operację obracania „kopuły" przeprowadzić z sześcio-ośmiościanem. Wyjściowy wielościan ma w każdym wierzchołku sekwencję: kwadrat-trójkąt-kwadrat-trójkąt – wielościan otrzymany po operacji (nie jest na pewno archimedesowy) ma również takie wierzchołki, lecz nie wszystkie: w sześciu wierzchołkach ma kwadrat-kwadrat-trójkąt-trójkąt. Ten ostatni wielościan, podobnie jak sześcio-ośmiościan, znany jest dobrze krystalografom, oba nazywają *cubooctaedrem*, jeden *trygonalnym*, drugi *heksagonalnym*.

Widać, że trudno było przez stulecia od czasów Archimedesa znaleźć tę czternastą bryłę. Domyślamy się, jak Miller do tego doszedł. Nie kleił zapewne modelu z jednej siatki, lecz z kawałków, być może z pojedynczych ścianek i w odpowiednim momencie popełnił błąd.

Załgaler zaś klasyfikował, porządkował, zestawiał wszelkie układy ścian foremnych tworzące wielościany wypukłe. Robił to bardziej systematycznie, niż przyjęło się przeprowadzać dowód istnienia trzynastu brył archimedesowych.

Epilogiem niech będzie stwierdzenie, że ostatnio w *Delcie* przeczytałem, że nowa bryła została odkryta dopiero przez Załgalera w latach pięćdziesiątych.

Rysunki, które pojawiły się w *Delcie* 11/1997, martwią Naczelnego Redaktora. Małą pociechą jest zapewne, że przedstawiają one w istocie to, co miały przedstawiać. Jeśli na rysunku widzimy sześcio-ośmiościan rombowy mały – być może jest to ta nowa bryła, ale to, co ją różni, jest schowane z tyłu. Pewność możemy mieć dopiero, gdy zobaczymy rysunek z pokazanymi krawędziami zasłoniętymi.

Lakatos, gdyby żył, przy obserwacji losów jednej bryłki miałby niezłą uciechę. Jego książkę polecam, zwłaszcza po francusku – tłumacze wzbogacili ją i pisali w swoim języku. Ojczystym językiem Lakatosa był węgierski, a pisał po angielsku.

P.S. W rozmowie przed kilku laty zgodziliśmy się z profesorem Dudą nazywać tę nieszczęsną bryłę nie dla wszystkich archimedesową *sześcio-ośmiościanem rombowym małym skręconym*.

Literatura

[1] I. Lakatos, *Proofs and Refutations*, Cambridge University Press, Cambridge 1976.

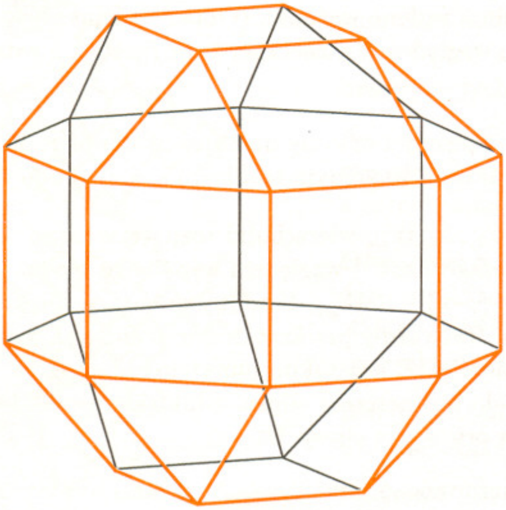
[1'] I. Lakatos, *Preuves et réfutations*, Hermann, Paris 1984.

[2] W.W.R. Ball, H.S.M. Coxeter, *Mathematical Recreations and Essays*, University of Toronto Press 1974 (XII wydanie).

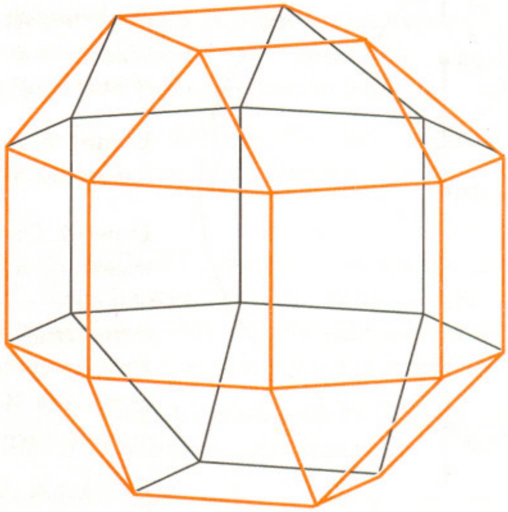
[2'] W.W.R. Ball, H.S.M. Coxeter, *Matematiczeskije esse i razwleczenija*, Mir, Moskwa 1986.

[3] H.M. Cundy, A.P. Rollet, *Modele matematyczne*, PWN, Warszawa 1967.

[4] V.A. Załgaler, *Convex Polyhedra with Regular Faces*; II wydanie: Consultants Bureau, New York 1969.



sześcio-ośmiościan rombowy mały



sześcio-ośmiościan rombowy mały skręcony