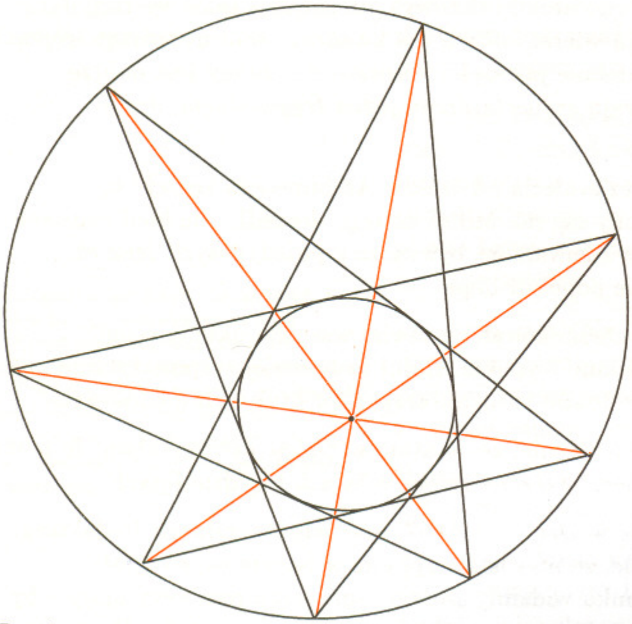
O parzystokątach wpisanych i opisanych na okręgach

Grzegorz KAPUSTKA, Michał KAPUSTKA

Niniejszy artykuł stanowi skrót pracy nagrodzonej złotym medalem w Konkursie Uczniowskich Prac z Matematyki w 1997 roku.

W poniższym tekście termin wielokąt będzie oznaczać wielokąt wypukły lub gwiaździsty. *Parzystokątem* nazwiemy wielokąt o parzystej liczbie wierzchołków. Rozważane dalej wielokąty są przeważnie wpisane w okrąg i jednocześnie opisane na innym okręgu; mówimy wówczas krótko, że wielokąt jest *wpisany i opisany na okręgach*.



Rys. 1

Naszkicujemy, bez nadmiernego wnikania w formalne szczegóły, kilka własności parzystokątów wpisanych i opisanych na okręgach. Własności te wynikają z dwóch prostych lematów. Dla zilustrowania używanych metod zajmiemy się najpierw nieco dokładniej dwiema (dualnymi) własnościami przedstawionymi poniżej, w Twierdzeniu 1.

Twierdzenie 1. W dowolnym parzystokącie wpisanym w okrąg i jednocześnie opisanym na innym okręgu

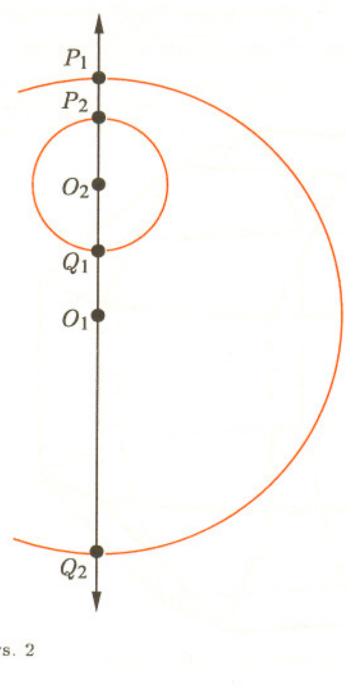
(1) proste łączące wierzchołki przeciwległe przecinają się w jednym punkcie;

(2) punkty przecięcia prostych zawierających boki przeciwległe leżą na jednej prostej.

W dowodzie twierdzenia wykorzystamy dwa nietrudne lematy.

Lemat 1. Dwa okręgi, położone jeden wewnątrz drugiego, można przekształcić przez rzut środkowy na dwie elipsy współśrodkowe.

Dowód. Punkty przecięcia prostej O_1O_2 z okręgami oznaczmy kolejno przez P_1, P_2, Q_1, Q_2 (patrz rys. 2). Rozważmy płaszczyznę S prostopadłą do płaszczyzny obu okręgów i zawierającą ich środki. Z odpowiednio dobranego punktu $A \in S$ wykonujemy teraz taki rzut środkowy, aby żaden punkt odcinka P_1Q_2 nie przeszedł do nieskończoności, a obrazy odcinków P_1P_2 i Q_1Q_2 miały równe długości. Wystarczy w tym celu wybrać tak punkt $A \in S$, by odcinki P_1P_2 i Q_1Q_2 były z niego widoczne pod tym samym kątem (takich punktów jest wiele; dobór jednego z nich ilustruje rysunek 3).



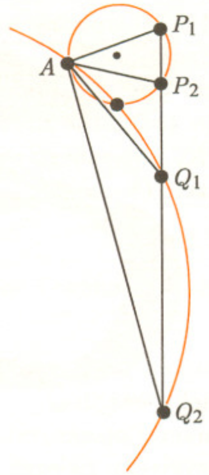
Rys. 2

Łatwo sprawdzić, że rzut środkowy z punktu A na płaszczyznę S_1 prostopadłą do dwusiecznej kąta P_1AQ_2 spełnia żądane warunki. (Obrazy odcinków P_1P_2 i Q_1Q_2 są wówczas symetryczne względem dwusiecznej kąta P_1AQ_2, a zatem są równej długości.) ■

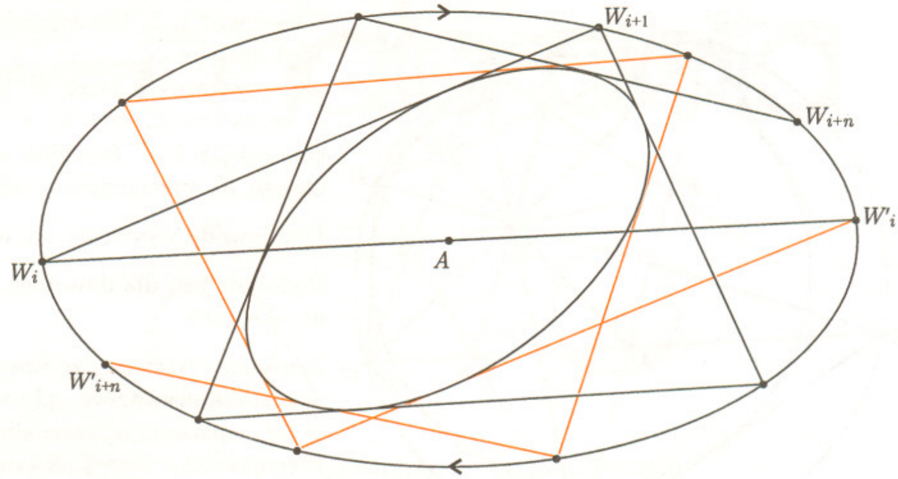
Lemat 2. Dowolny parzystokąt wpisany i opisany na elipsach współśrodkowych ma środek symetrii, który jest zarazem wspólnym środkiem symetrii obu elips.

Dowód. Oznaczmy przez $W_1, W_2, \ldots, W_{2n}$ wierzchołki rozpatrywanego wielokąta, a ich obrazy w symetrii środkowej względem wspólnego środka A obu elips – odpowiednio przez $W_1', W_2', \ldots, W_{2n}'$. Ustalmy orientację elipsy zewnętrznej E jak na rysunku 4. Rozważmy przekształcenie p elipsy E na E, w którym obraz $p(W)$ punktu $W \in E$ jest takim punktem elipsy E, że odcinek $Wp(W)$ jest styczny do wewnętrznej elipsy, a łuk skierowany $Wp(W)$ ma orientację zgodną z wybraną orientacją elipsy E.

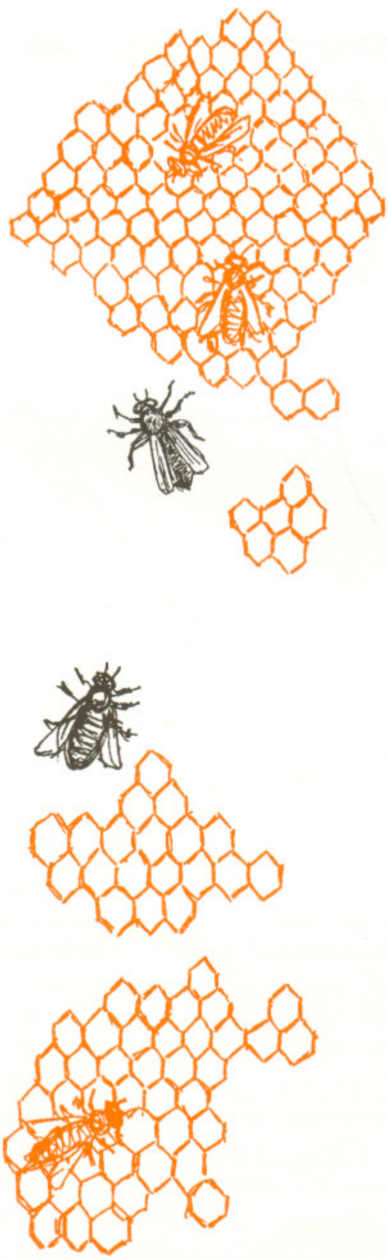
Jeśli punkt $X \in E$ należy do skierowanego łuku $YZ \subset E$, to oczywiście $p(X)$ leży na łuku skierowanym $p(Y)p(Z)$. Przez indukcję dostajemy stąd



Rys. 3



Rys. 4



$$(1) \qquad (X \in YZ \subset E) \quad \Rightarrow \quad (p^n(X) \in p^n(Y)p^n(Z) \subset E)\,.$$

Przypuśćmy teraz, że pewne dwa przeciwległe wierzchołki parzystokąta, np. W_i oraz W_{i+n}, nie są środkowo-symetryczne względem punktu A, tzn. $W_i' \neq W_{i+n}$ oraz $W_i \neq W_{i+n}'$. Załóżmy ponadto bez zmniejszenia ogólności, że

$$(2) \qquad W_{i+n} \in W_iW_i' \subset E$$

(w przeciwnym przypadku dalsze postępowanie jest analogiczne). Ponieważ rozpatrujemy wielokąt wpisany i opisany na elipsach, więc $p^n(W_k) = W_{k+n}$, $p^n(W_k') = W_{k+n}'$ (przyjmujemy oczywiście $W_{j+2n} = W_j$). Zatem, na mocy (1) mamy

$$(3) \qquad W_i \in W_{i+n}W_{i+n}' \subset E.$$

Z warunków (2) i (3) wynika, że łuki skierowane $W_{i+n}W_i'$ oraz $W_{i+n}'W_i$ mają przeciwną orientację. Z drugiej strony, jeden z nich jest obrazem drugiego w symetrii środkowej, która zachowuje orientację. Otrzymana sprzeczność kończy dowód lematu. ■

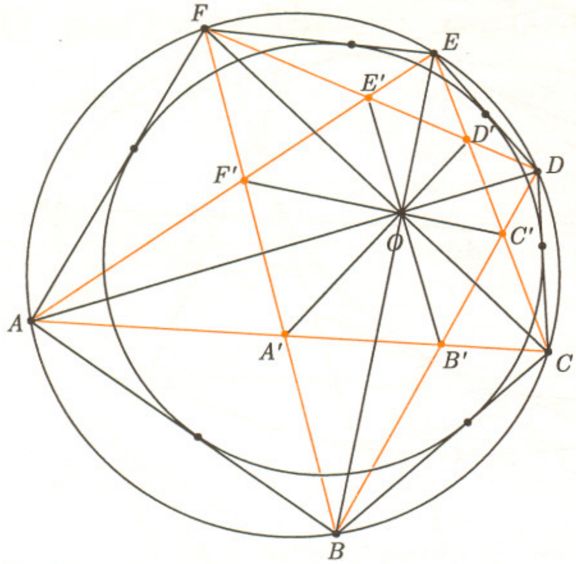
Dowód twierdzenia 1. Po wykonaniu rzutu opisanego w lemacie 1 okręgi wpisany i opisany przekształcą się na elipsy współśrodkowe, wpisaną i opisaną, odpowiednio. Na mocy lematu 2 parzystokąt zostanie przekształcony na parzystokąt środkowo-symetryczny. Przekątne łączące wierzchołki przeciwległe parzystokąta środkowo-symetrycznego przecinają się oczywiście w środku symetrii. Zatem, w parzystokącie pierwotnym przekątne też przecinają się w jednym punkcie, co kończy dowód tezy (1). Teza (2) ma charakter dualny. Boki przeciwległe parzystokąta środkowo-symetrycznego są równoległe (tzn. przecinają się w nieskończoności); zatem przedłużenia boków przeciwległych w pierwotnym parzystokącie przecinają się na jednej prostej. ■

Na podstawie udowodnionych lematów można dokonać wielu interesujących obserwacji. Oto niektóre z nich. Szczegółowe dowody pozostawiamy zainteresowanym Czytelnikom.

Obserwacja 1. Rozważmy sześciokąt $ABCDEF$ wpisany i opisany na okręgach. Jego przekątne AC, BD, CE, DF, EA, FB wyznaczają nowy sześciokąt $A'B'C'D'E'F'$ (rys. 5). Wówczas przekątne łączące przeciwległe wierzchołki tych sześciokątów przecinają się w jednym punkcie – wspólnym dla obu sześciokątów.

Aby ją uzasadnić, wystarczy zastosować lemat 1 i przekształcić oba sześciokąty na sześciokąty środkowo-symetryczne o wspólnym środku symetrii.

Podobnie jest dla dowolnego parzystokąta $A_1A_2\ldots A_{2n}$ wpisanego i opisanego na okręgach.



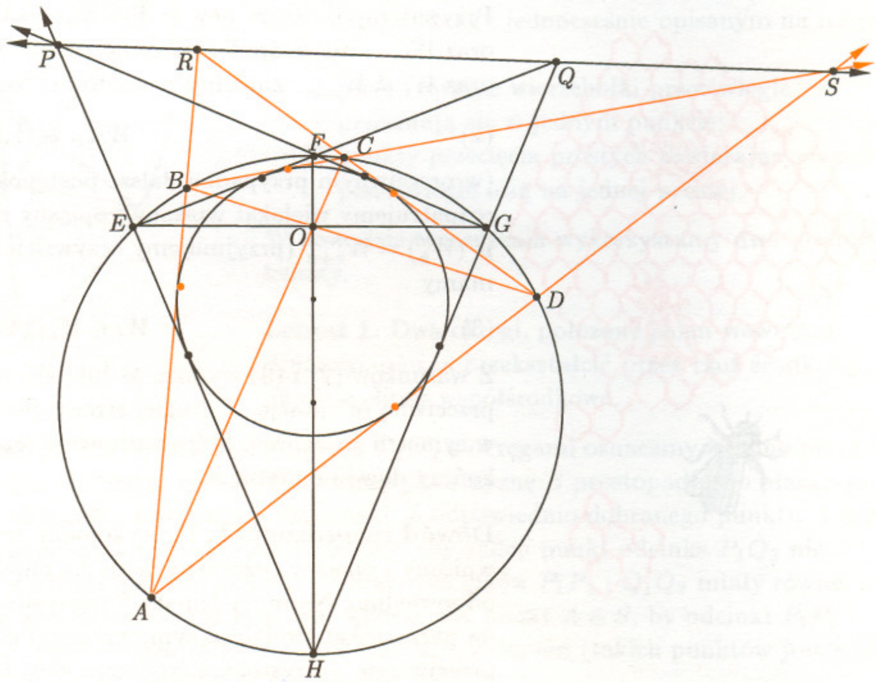
Rys. 5

Obserwacja 2. Rozważmy czworokąt $ABCD$ wpisany w okrąg K_1 i opisany na okręgu K_2 (rys. 6). Oznaczmy punkt przecięcia jego przekątnych przez O. Wówczas punkt O jest współliniowy ze środkami okręgów K_1 i K_2, a ponadto, przekątne każdego czworokąta $EFGH$ wpisanego w okrąg K_1 i opisanego na okręgu K_2 przecinają się właśnie w punkcie O.

Dla dowodu wystarczy znów zastosować lemat 1.

Podobnie jest dla dowolnego parzystokąta wpisanego i opisanego na okręgach.

Zauważmy wreszcie, że wszystkie wymienione twierdzenia pozostaną prawdziwe, gdy w rozważaniach zastąpimy okręgi wpisane i opisane elipsami wpisanymi i opisanymi. Przedstawione wyżej obserwacje mają oczywisty związek z Wielkim Twierdzeniem Ponceleta (patrz np. *Delta* 6/1997). Wykorzystując lematy 1 i 2 można udowodnić niektóre szczególne przypadki tego twierdzenia, np. dla czworokąta i okręgów.



Rys. 6

Bibliografia

[1] H. S. M. Coxeter, *Wstęp do geometrii dawnej i nowej*, PWN, Warszawa 1967.

[2] *Szkoła geometrii. Odczyty kaliskie*, WSiP, Warszawa 1993.

[3] G. H. Niewęgłowski, *Geometrya*, Paryż 1869.

Rozwiązanie zadania M 843.

Wśród skończonej liczby możliwych połączeń danych $2n$ punktów n odcinkami wybierzmy to, dla którego suma długości tych odcinków jest najmniejsza. Udowodnimy, że wtedy żadne dwa odcinki nie przecinają się. Gdyby bowiem pewne dwa odcinki A_1A_2, B_1B_2 z naszego połączenia przecinały się, to co najmniej jedna z nierówności

$$|A_1B_1| + |A_2B_2| < |A_1A_2| + |B_1B_2|,$$
$$|A_1B_2| + |A_2B_1| < |A_1A_2| + |B_1B_2|$$

byłaby spełniona (jeśli odcinki A_1A_2, B_1B_2 przecinają się w jednym punkcie, to spełnione są obie nierówności, w przeciwnym przypadku tylko jedna z nich). To oznaczałoby jednak, że suma nie była najmniejsza.

Rozwiązanie zadania F 473.

W oddziaływaniach wysokich energii suma mas wszystkich końcowych cząstek musi być mniejsza od masy całkowitej układu M zderzających się cząstek. Ogólnie, dla układu n cząstek mamy

$$M^2c^2 = \left(\sum_i^n E_i\right)^2 - \left(\sum_i^n p_i c\right)^2.$$

W naszym przypadku

$$M = \sqrt{(E/c^2 + m)^2 - (p/c)^2},$$

gdzie $E = \sqrt{(m_X c^2)^2 + (pc)^2}$ jest energią cząstki X w układzie spoczywającego nukleonu. Po prostym przekształceniu i podstawieniu danych otrzymujemy

$$M = \sqrt{m_X^2 + m^2 + 2mE/c^2} \approx 151{,}13\ \mathrm{GeV/c^2}.$$

W takim razie $M - m_X - m < m_\pi$, a więc piony nie mogą w tej reakcji powstawać.