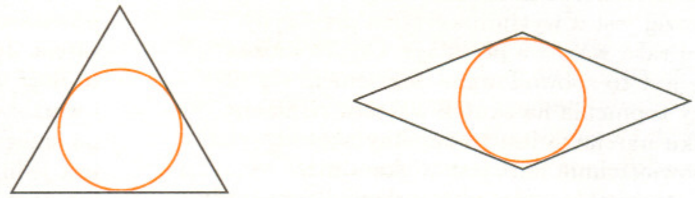
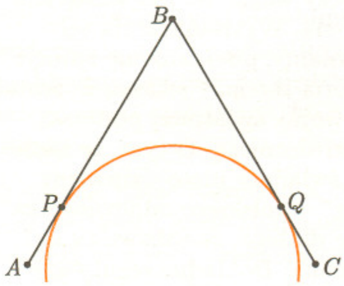
mała delta



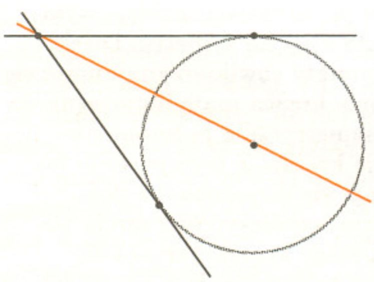
Wielokąty równoboczne i foremność

Trójkąt równoboczny jest foremny, to znaczy ma również wszystkie kąty równe. Czworokąt równoboczny, czyli romb, nie musi być foremny, tym bardziej wielokąty równoboczne o większej liczbie boków.

A czy warunek, by wielokąt równoboczny był opisany na okręgu, coś tu zmienia? Dla trzech boków nic, bo każdy trójkąt jest opisany na jakimś okręgu. Dla czworokąta nic nie poprawia, bo każdy romb też jest opisany na jakimś okręgu. A dla pięciokąta?

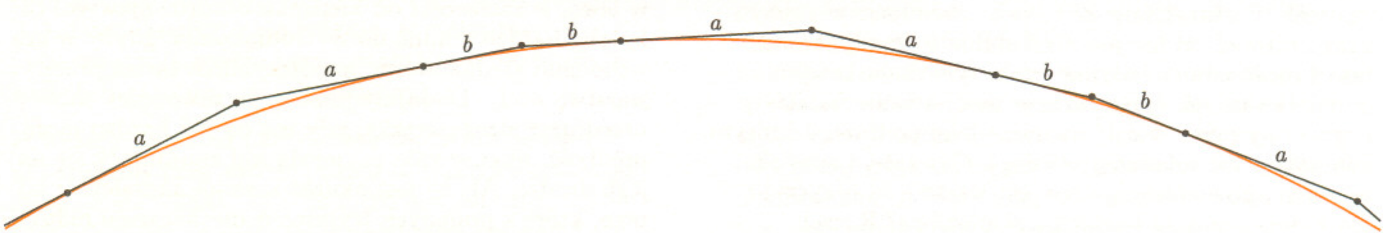


Kilka prób narysowania pięciokąta równobocznego opisanego na okręgu przekonuje nas, że chyba tu jest jakoś inaczej niż z czworokątami – wygląda na to, że równoboczny pięciokąt opisany na okręgu foremny być musi. I tak jest w istocie. Nawet więcej:
nieparzystokąt równoboczny opisany na okręgu jest foremny.
I nic więcej: *dla każdego parzystego $n > 2$ istnieje n-kąt równoboczny opisany na okręgu i nieforemny.*



Aby tego dowieść, dogodnie jest wykazać w ogólnym przypadku to, co widać na rysunku rombu:
jeśli kolejne boki AB i BC wielokąta równobocznego opisanego na okręgu styczne są do niego w punktach P i Q, to $PB = BQ$ i $AP = QC$.

Istotnie, pierwsza równość wynika stąd, że figura złożona z okręgu i dwóch stycznych do niego ma oś symetrii – prostą łączącą punkt ich przecięcia ze środkiem okręgu; druga równość to wynik odjęcia równych odcinków z pierwszej równości od, z założenia, równych boków.



Wyobraźmy sobie teraz wielokąt równoboczny, nieforemny i opisany na okręgu. Wobec nieforemności przynajmniej jeden bok nie jest styczny do okręgu w swoim środku. Rozpocznijmy od niego wędrówkę po obwodzie wielokąta – spotykać będziemy kolejno odcinki wyznaczone przez wierzchołki i punkty styczności tylko dwóch długości a i b i to w sekwencji (zacznijmy od wierzchołka): *abbaabba*... Gdyby liczba par była nieparzysta, to na końcu byłoby ...*abbaab*, co nie zgadza się z udowodnioną przed chwilą prawidłowością. Sprzeczność. Ponieważ wielokąt równoboczny można jednak opisać na okręgu, więc musimy odrzucić albo przypuszczenie, że nie jest on foremny, albo przypuszczenie, że jest on nieparzystokątem.

Dowodzi to pierwszego wyróżnionego kursywą stwierdzenia. Dowód drugiego musi być konstruktywny, ale nie jest trudny i zostawiamy go Czytelnikom.

Małą Deltę przygotował Marek KORDOS