Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1998.

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 VI 1998

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 244 (WT=2,89) i 245 (WT=2,54) z numeru 10/1997

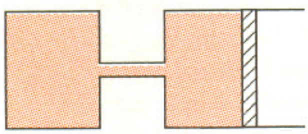
Przemysław Gadziński	– Środa Śl.	42,92
Andrzej Idzik	– Bolesławiec	23,36
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	18,68

Zadania z fizyki nr 256, 257

Redaguje Jerzy B. BROJAN

256. Jednorodny strumień równolegle biegnących cząstek (np. strumień światła) pada na kulę: a) odbijającą cząstki sprężyście (zwierciadło kuliste), b) taką, do której cząstki się „przyklejają" (czarną). Jeżeli promień kul jest jednakowy, to na którą z nich działa większa siła? A może siły są jednakowe?

257. Naczynie z gazem jest izolowane termicznie od otoczenia i przedzielone na dwie części, z których jedna jest zamknięta tłokiem wywierającym na gaz stałe ciśnienie p (rys. 1). Jeżeli grzałka elektryczna dostarczy do wnętrza pewną ustaloną ilość ciepła Q, to w którym przypadku tłok przesunie się bardziej:
a) gdy podgrzejemy lewą część naczynia,
b) gdy podgrzejemy prawą część naczynia,
c) gdy połowę ciepła dostarczymy lewej części, a połowę – prawej?
Kanalik łączący obie części naczynia jest tak wąski, że temperatura nie ulega wyrównaniu.



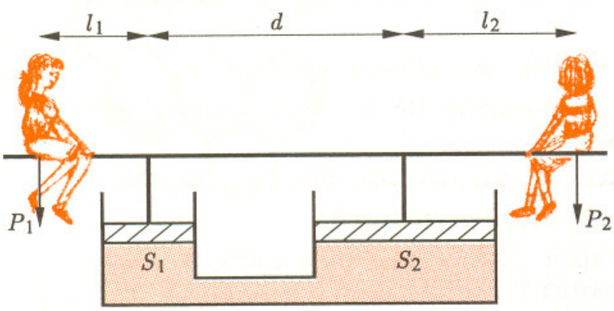
Rys. 1

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 12/1997

Przypominamy treść zadań:

248. Kasia i Basia siedzą na huśtawce opartej na dwóch podpórkach odległych od siebie o d i połączonych z tłokami o powierzchniach S_1 i S_2 wywierającymi parcie na ciecz (rys. 2); odległości dziewczynek od punktów podparcia wynoszą odpowiednio l_1 i l_2. Jaki warunek muszą spełniać wymienione parametry oraz ciężary dziewczynek P_1 i P_2, aby huśtawka pozostawała w równowadze? Ciężar huśtawki i tłoków pominąć.

249. „Czarna skrzynka" zawiera układ oporników i cztery wyprowadzenia, przy czym do dwóch spośród nich przykładamy ustalone napięcie U ze źródła zasilania, a do pozostałych dwóch dołączamy woltomierz o bardzo wielkim oporze własnym i mierzymy napięcie U'. Istnieje sześć możliwych sposobów przyłączenia zasilania i woltomierza do „czarnej skrzynki", a zatem sześć możliwych wartości U'. Zaprojektować możliwie najprostszy schemat „czarnej skrzynki", taki, aby wśród nich znalazły się $U' = 0{,}75U$, $U' = 0{,}5U$ i $U' = 0{,}25U$.



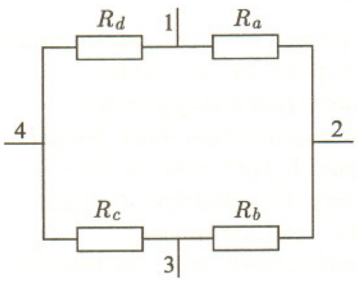
Rys. 2

248. Gdy lewy tłok przesunie się w dół o x_1, prawy przesunie się w górę o $x_2 = x_1S_1/S_2$ (możemy założyć nieściśliwość cieczy). Oznacza to, że dźwignia obróci się względem punktu odległego o $d_1 = dS_2/(S_1+S_2)$ od lewego pręta i o $d_2 = dS_1/(S_1+S_2)$ od prawego. Punkt ten można uznać za punkt podparcia dźwigni, skąd wynika warunek równowagi

$$P_1(l_1+d_1) = P_2(l_2+d_2)\,,$$

czyli

$$P_1(l_1S_1 + l_1S_2 + dS_2) = P_2(l_2S_1 + l_2S_2 + dS_1)\,.$$



Rys. 3

249. Jedno z rozwiązań (czy najprostsze, okaże się po przejrzeniu listów od Czytelników) jest przedstawione na rysunku 3, gdzie wartości oporu spełniają związki: $R_b = R_a(\sqrt{217}-1)/36$, $R_c = 3R_b - R_a = R_a(\sqrt{217}-13)/12$, $R_d = 9R_b = R_a(\sqrt{217}-1)/4$. Wtedy $U' = 0{,}75U$ otrzymujemy po przyłączeniu napięcia U do wyjść 2 i 3, a woltomierza do wyjść 1 i 4; $U' = 0{,}5U$ – po przyłączeniu napięcia do 2 i 4, a woltomierza do 1 i 3; $U' = 0{,}25U$ – po przyłączeniu napięcia do 1 i 4, a woltomierza do 2 i 3.

Zadania z matematyki nr 359, 360

Redaguje Marcin E. KUCZMA

359. Czy istnieje para funkcji f, $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ spełniających dla każdej liczby $x \in \mathbf{R}$ równania $f(g(x)) = x^2$ oraz $g(f(x)) = x^4$?

360. Dany jest ciąg liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \ldots, a_{2n+1}$ o następującej własności: po odrzuceniu dowolnego wyrazu pozostałe można podzielić na takie dwie grupy po n wyrazów, że suma wyrazów w pierwszej grupie jest równa sumie wyrazów w drugiej. Dowieść, że wszystkie wyrazy ciągu są równe.

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 VI 1998

Twierdzenie podane w zadaniu 360, przy dodatkowym założeniu, że liczby a_i są całkowite, było kiedyś zadaniem olimpijskim (patrz: J. Browkin, *Zadania z olimpiad matematycznych*, tom 5, WSiP, Warszawa 1980, zadanie 82). Uogólnienie na przypadek ciągów o wyrazach rzeczywistych zaproponował pan Piotr Kumor z Olsztyna.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 12/1997

Przypominamy treść zadań:

351. Wyznaczyć największą liczbę naturalną n, dla której istnieją czteroelementowe zbiory $A_1, \ldots, A_n$ o własności: każdy zbiór A_i ma z każdym innym zbiorem A_j dokładnie jeden element wspólny, ale nie istnieje wspólny element wszystkich zbiorów A_i.

352. Funkcja różniczkowalna $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ spełnia wraz z pewną funkcją $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ równanie $f(x) = g(f'(x))$ dla $x \in \mathbf{R}$. Dowieść, że funkcja f jest wypukła lub wklęsła.

351. Załóżmy, że $A_1, \ldots, A_n$ są zbiorami czteroelementowymi o zadanej własności. Niech $A_1 = \{a, b, c, d\}$. Niech I_a będzie zbiorem tych numerów i $(2 \le i \le n)$, dla których $a \in A_i$. Analogicznie określamy zbiory I_b, I_c, I_d. Zbiór A_1 ma z każdym innym zbiorem A_i dokładnie jeden element wspólny. Stąd wynika, że zbiory I_a, I_b, I_c, I_d są rozłączne, a ich suma jest całym zbiorem $\{2, \ldots, n\}$. Można przyjąć (zmieniając ewentualnie oznaczenia), że I_a jest najliczniejszym z tych czterech zbiorów. Załóżmy, że liczy on m elementów. Zachodzi więc nierówność $m \ge (n-1)/4$.

Możemy też założyć (w razie potrzeby znów zmieniając oznaczenia), że $I_a = \{2, \ldots, m+1\}$. Wobec tego $a \in A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{m+1}$. W myśl postulowanej własności, a nie jest elementem wszystkich zbiorów A_i; tak więc $m + 1 < n$ oraz $a \notin A_n$. Każdy ze zbiorów $A_1, A_2, \ldots, A_{m+1}$ zawiera jakiś element zbioru A_n; są to różne elementy (bo każde dwa zbiory A_i, A_j o numerach $1 \le i < j \le m+1$ mają już wspólny element a). W takim razie liczba tych zbiorów nie przekracza 4, a to znaczy, że $m \le 3$. W połączeniu z uzyskaną wcześniej nierównością daje to oszacowanie $n \le 13$.

Nietrudno sprawdzić, że określając

$$A_i = \{i-11,\ i-5,\ i-1,\ i,\ i+2,\ i+8,\ i+12\} \cap \{1, \ldots, 13\}$$

dla $i = 1, \ldots, 13$ otrzymujemy przykład trzynastu zbiorów spełniających podane warunki. Zatem $n = 13$ jest największą możliwą wartością n.

352. Wystarczy wykazać, że f' jest funkcją monotoniczną. Przypuśćmy więc, że tak nie jest. Dla pewnej trójki liczb rzeczywistych $a < b < c$ zachodzą wówczas nierówności

$$f'(a) < f'(b) > f'(c) \quad \text{lub} \quad f'(a) > f'(b) < f'(c);$$

przyjmijmy pierwszy wariant (drugi jest analogiczny).

Weźmy dowolną liczbę w spełniającą związki $f'(b) > w > \max\{f'(a), f'(c)\}$. Pochodna każdej funkcji różniczkowalnej rzeczywistej ma własność Darboux. Istnieją więc liczby $u \in (a; b)$ oraz $v \in (b; c)$ spełniające równanie $f'(u) = w = f'(v)$. Zgodnie z założeniem, $f(u) = g(f'(u))$ oraz $f(v) = g(f'(v))$. Tak więc $f(u) = f(v)$. Niech p i q będą punktami przedziału $\langle u; v \rangle$, w których funkcja f osiąga swoje wartości ekstremalne na tym przedziale:

$$f(p) = \min_{u \le x \le v} f(x), \qquad f(q) = \max_{u \le x \le v} f(x).$$

Z równości $f(u) = f(v)$ oraz $f'(u) = f'(v)$ wynika, że $f'(p) = f'(q) = 0$; zatem $f(p) = g(0) = f(q)$. Stąd wniosek, że funkcja f jest na przedziale $\langle u; v \rangle$ stała, i wobec tego $f'(x) = 0$ dla $x \in \langle u; v \rangle$. Ale $f'(b) > w = f'(u)$. Otrzymana sprzeczność kończy dowód.

Rozwiązanie zadania F 474.
Cząstka X jest przyzwoita i natychmiast po powstaniu ubiera się (podobnie jak kwarki) tworząc egzotyczny hadron. Jeżeli jej pęd jest znacząco większy od $m_X c/2$, to cząstka X wywołuje kaskady hadronowe, jak normalny hadron (porównaj rozwiązanie zadania poprzedniego), ale po każdym zderzeniu odradza się w nowej „kreacji". Jeżeli jednak jej pęd spadnie poniżej około $m_X c/2$, to przestaje wywoływać kaskady (może co najwyżej nadal zmieniać swoje hadronowe ubranko) i pomimo silnego oddziaływania prawie nie traci energii w materii detektora, co pozwala jej z niego wyjść jak cząstce słabo oddziałującej, takiej jak mion.

Rozwiązanie zadania M 841.
Ustawienie może być następujące: $x_k = k$ dla k nieparzystych i $x_k = n - k$ dla k parzystych $(k \le n-1)$.

Wtedy dla ciągu $s_m = \sum_{i=1}^{m} x_i$ zachodzi $n | s_{2k-1} - k$ (gdyż $s_{2k-1} = k^2 + (k-1)n - (k-1)k = (k-1)n + k$), podobnie $n | s_{2k} - (n-k)$. Rozpatrując wszystkie cztery możliwości parzystości bądź nieparzystości i i j stwierdzamy, że $x_{i+1} + \ldots + x_j = s_i - s_j$ nie jest podzielne przez n dla $0 < i < j < n$.

Pytanie dodatkowe: Ile jest takich ustawień?