4/98 (4)

Γlimatias

CYFROMANIA (4)

Kontynuujemy rozważania z poprzedniego Γ-limatiasu mające doprowadzić nas do scharakteryzowania możliwych końcówek potęg trójki.

$k = 3$. Okres ciągu reszt z dzielenia potęg trójki przez 1000 wynosi $NWW(100, 2) = 100 = 5 \cdot 20$. Każda końcówka dwucyfrowa może być uzupełniona do trzycyfrowej przez dopisanie jednej z 5 cyfr – parzystej lub nieparzystej (p lub n). Bezpośrednie wyliczenie reszt z dzielenia potęg trójki przez 200 pokazuje, że trzecia cyfra od końca musi być (przy danych ostatnich 2 cyfrach):

01 – p	21 – n	41 – p	61 – n	81 – p
03 – p	23 – n	43 – p	63 – n	83 – p
07 – n	27 – p	47 – n	67 – p	87 – n
09 – p	29 – n	49 – p	69 – n	89 – p

W dziewięciu przypadkach trzecie cyfry od końca są nieparzyste. Szansę na rozwiązanie drugiej części zadania dają więc końcówki: 707, 121, 323, 929, 747, 161, 363, 969 i 787.

$k = 4$. Okres wynosi $NWW(500, 4) = 500$, czyli 5 razy więcej niż poprzednio. Znowu, każda końcówka trzycyfrowa powtarza się z okresem 100. Okres 100 ma też ciąg reszt z dzielenia potęg trójki przez 2000, zatem 500 dopuszczalnych reszt z dzielenia przez 10000 powstaje przez dodanie do 100 reszt z dzielenia przez 2000 liczb: 0, 2000, 4000, 6000 i 8000. Tak więc każda końcówka trzycyfrowa „pamięta” parzystość czwartej cyfry od końca, ale poza postulatem parzystości lub nieparzystości ta czwarta cyfra może być dowolna.

$k \geq 5$. Okres wynosi $NWW(5^{k-1} \cdot 4, 2^{k-2}) = 5 \cdot 10^{k-2}$, czyli 10 razy więcej niż dla $k-1$. Zatem potęgi trójki przyjmują 10 razy więcej końcówek k-cyfrowych niż $(k-1)$-cyfrowych, a to znaczy, że na k-tą cyfrę od końca nie ma żadnych ograniczeń i możemy ją zapostulować w sposób dowolny.

Powyższe rozważania porządkuje następujące spostrzeżenie. Potęgi trójki przy dzieleniu przez 80 dają ciąg reszt okresowy z okresem 4. Zatem tylko 4 reszty z dzielenia przez 80 są dopuszczalne: 1, 3, 9 i 27.

Przy dzieleniu przez 10^4 otrzymujemy 500 możliwych reszt. Ponieważ $\frac{10^4}{80} = 125 = \frac{500}{4}$, więc dopuszczalnymi resztami z dzielenia potęg trójki przez 10^4 są wszystkie te reszty, które dzielą się przez 80 z resztą 1, 3, 9 lub 27.

Pozwala to scharakteryzować końcówki potęg trójki:

Wniosek: Liczba $0 < r < 10^k$ może być k-cyfrową końcówką potęgi trójki wtedy i tylko wtedy, gdy:
r daje z dzielenia przez 80 resztę 1, 3, 9 lub 27 (dla $k \geq 4$),
r daje z dzielenia przez 40 resztę 1, 3, 9 lub 27 (dla $k = 3$),
r daje z dzielenia przez 20 resztę 1, 3, 7 lub 9 (dla $k = 2$),
r jest równe 1, 3, 7 lub 9 (dla $k = 1$).

Stosując powyższe kryterium do dziewięciu wybranych poprzednio końcówek trzycyfrowych stwierdzamy, że czwarta cyfra od końca musi być:

707 – n	929 – n	363 – n
121 – n	747 – p	969 – p
323 – p	161 – p	787 – n

Zatem druga część zadania ma odpowiedź pozytywną. Są 4 liczby dwucyfrowe, które na końcu potęgi trójki mogą się znaleźć powtórzone dowolnie wiele razy: 23, 47, 61 i 69.

JWR

MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI

(2′) *Wyjaśnienie oszustwa* (2): Podany dowód jest błędny. Suma liczb niewymiernych nie musi być liczbą niewymierną. Poprawny dowód wymaga nieco bardziej subtelnych rozważań.

Rozwiązanie: Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba $\sqrt{3-\sqrt{8}} - \sqrt{2}$ jest wymierna i oznaczmy ją przez w. Wtedy

$$w = \sqrt{3-\sqrt{8}} - \sqrt{2},$$

$$w + \sqrt{2} = \sqrt{3-\sqrt{8}},$$

$$w^2 + 2\sqrt{2}w + 2 = 3 - 2\sqrt{2},$$

$$2\sqrt{2}(w+1) + (w-1)(w+1) = 0.$$

Dzieląc ostatnią równość przez $w+1$ otrzymujemy

$$2\sqrt{2} + w - 1 = 0,$$

co stanowi sprzeczność z założeniem wymierności liczby w, gdyż lewa strona równości jest liczbą niewymierną i nie może być równa 0.

JWR

(3′) *Wyjaśnienie oszustwa* (3): Podstawienie $t = e^{1/x}$ nie jest ciągłe na przedziale całkowania $[-1, 1]$, gdyż nie jest określone w 0. Obrazem przedziału całkowania nie jest przedział $[\frac{1}{e}, e]$, lecz jego dopełnienie w $(0, \infty)$.

Poprawny rachunek powinien wyglądać następująco:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x =$$

$$= \int_{-1}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{x^2(e^{1/x} + e^{-1/x})} + \int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2(e^{1/x} + e^{-1/x})} =$$

$$= -\int_{1/e}^{0} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} - \int_{\infty}^{e} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} =$$

$$= \int_{0}^{1/e} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} + \int_{e}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \operatorname{arctg} t \Big|_0^{1/e} + \operatorname{arctg} t \Big|_e^{\infty} =$$

$$= \operatorname{arctg}\frac{1}{e} + \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} e = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{e}$$

lub, jak kto woli, $\pi - 2\operatorname{arctg} e$.

JWR

Korespondencję do Γ-limatiasu prosimy kierować pod adresem:
Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCŁAW; e-mail: jwr@ math.uni.wroc.pl