

# Zasada szufladkowa Dirichleta w mechanice

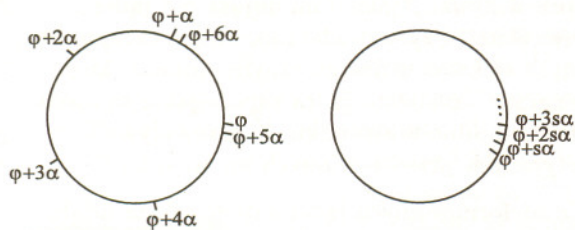
Henryk ŻOŁĄDEK

Zastosowania zasady Dirichleta, które opisujemy poniżej, opierają się na jednym podstawowym zjawisku.

Niech  $S^1$  będzie okręgiem parametryzowanym przez kąt mod  $2\pi$ . Rozważmy obrót tego okręgu o kąt  $\alpha$ . Obrazy punktu  $\varphi$  przy powtarzaniu obrotu tworzą zbiór

$$\varphi, \varphi + \alpha, \varphi + 2\alpha, \varphi + 3\alpha, \dots \pmod{2\pi}$$

nazywany orbitą punktu  $\varphi$ .



Rys. 1.

## Twierdzenie 1.

(a) Jeśli  $\alpha/2\pi = p/q$ ,  $q > 0$ , jest ułamkiem nieskracalnym, to orbita każdego punktu okręgu jest zbiorem  $q$ -elementowym.

(b) Jeśli  $\alpha/2\pi$  jest liczbą niewymierną, to orbita każdego punktu okręgu tworzy zbiór wszędzie gęsty na okręgu.

Zbiór  $A$  jest wszędzie gęsty na okręgu, jeśli każdy łuk zawiera przynajmniej jeden punkt zbioru  $A$ .

Dowód tego twierdzenia, w przypadku (b) przeprowadzony za pomocą zasady szufladkowej Dirichleta, pojawiał się w *Delcie* wiele razy (np. w artykule R. Kołodzieja o Wielkim Twierdzeniu Ponceleta w numerze 6/1997). Jego zastosowania wykraczają poza mechanikę, o czym można przekonać się np. rozwiązując samodzielnie poniższe zadanie (też już w *Delcie* omawiane).

## Zadanie.

Rozważmy ciąg pierwszych cyfr potęg dwójki:

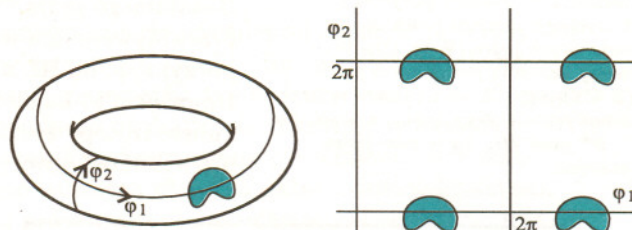
$$1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, 2, 5, 1, 2, 4, 8, \dots$$

Czy wystąpi w tym ciągu cyfra 7?

Okazuje się, że w zaskakująco dużej liczbie przykładów mechanicznych i geometrycznych zachodzi alternatywa analogiczna do tej z Twierdzenia 1.

**Przykład 1. Obmotka torusa.** Torus  $T^2$  jest to iloczyn kartezjański dwu okręgów,  $T^2 = S^1 \times S^1$ ; torus wygląda jak powierzchnia dętki (ściślej: jest jej topologicznie równoważny). Wygodnie jest przedstawiać go jako płaszczyznę  $\varphi_1, \varphi_2$  zwiniętą w dwu prostopadłych kierunkach: wszystkie linie

$\varphi_1 = 2\pi k$  są utożsamiane; podobnie jest z liniami  $\varphi_2 = 2\pi m$ .



Rys. 2.

Rozważmy punkt materialny na płaszczyźnie  $\varphi_1, \varphi_2$ , poruszający się ruchem bezwładnym i prostoliniowym (przyspieszenie jest równe zero). Równania ruchu są postaci

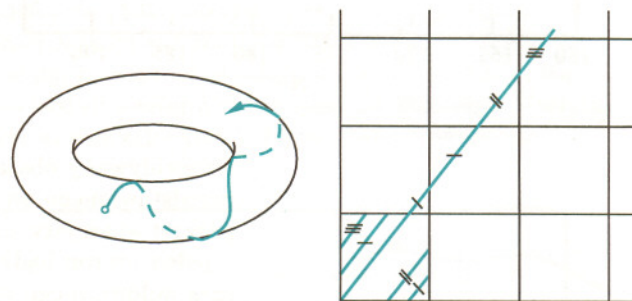
$$(1) \quad \dot{\varphi}_1 = \omega_1, \quad \dot{\varphi}_2 = \omega_2,$$

gdzie  $\omega_1, \omega_2$  są składowymi stałej prędkości punktu, a kropka oznacza pochodną względem czasu.

Rozwiązaniami są proste

$$(2) \quad \varphi_1(t) = \varphi_1(0) + \omega_1 t, \quad \varphi_2(t) = \varphi_2(0) + \omega_2 t.$$

Równania ruchu i ich rozwiązanie (2) można teraz rzutować na torus. Otrzymamy tak zwaną obmotkę.



Rys. 3. Obmotka torusa.

Mówimy, że liczby  $\omega_1, \omega_2$  są *wymiernie niezależne*, jeśli z równości  $k_1\omega_1 + k_2\omega_2 = 0$ , z całkowitymi  $k_1, k_2$ , wynika, że  $k_1 = k_2 = 0$ . Na przykład:  $\sqrt{6}$  i  $\sqrt{8}$  są wymiernie niezależne, a  $\sqrt{2}$  i  $\sqrt{8}$  – nie.

## Twierdzenie 2.

(a) Jeśli  $\omega_1$  i  $\omega_2$  są wymiernie zależne, to każda krzywa fazowa (2), zrzutowana na torus, jest zamknięta.

(b) Jeśli  $\omega_1$  i  $\omega_2$  są wymiernie niezależne, to każda krzywa fazowa (2) jest wszędzie gęsta w torusie.

## Dowód.

(a) Jeśli  $k_1\omega_1 + k_2\omega_2 = 0$ ,  $k_1^2 + k_2^2 \neq 0$ , to równania z niewiadomą  $T$ ,

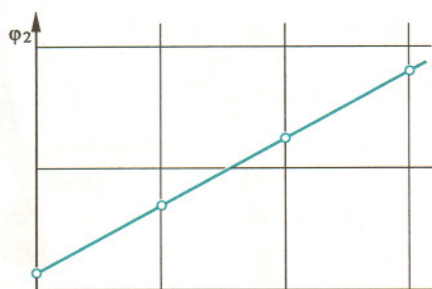
$$\varphi_1(T) = \varphi_1(0) + 2\pi k_2, \quad \varphi_2(T) = \varphi_2(0) - 2\pi k_1,$$

są niesprzeczne. Ich wspólne rozwiązanie stanowi okres krzywej (2) na torusie.

(b) Gdy  $\omega_1$  i  $\omega_2$  są wymiernie niezależne, to liczba  $\omega_2/\omega_1$  jest niewymierna. Rozważmy punkty kolejnych przecięć krzywej fazowej (2) z południkiem  $\varphi_1 = 0 \pmod{2\pi}$  (rysunek 4). Ich szerokości geograficzne będą równe

$$\varphi_{2,k} = \varphi_{2,0} + 2\pi(\omega_2/\omega_1)k \pmod{2\pi}.$$

To zaś jest orbita punktu  $\varphi_{2,0}$  okręgu względem obrotu o kąt  $2\pi\omega_2/\omega_1$ . Z Twierdzenia 1 wynika, że jest ona gęsta na okręgu. Ponieważ kolejne gałęzie trajektorii (2) w  $T^2$  są równoległe, więc dostajemy stąd gęstość całej krzywej (2) w torusie.



Rys. 4.

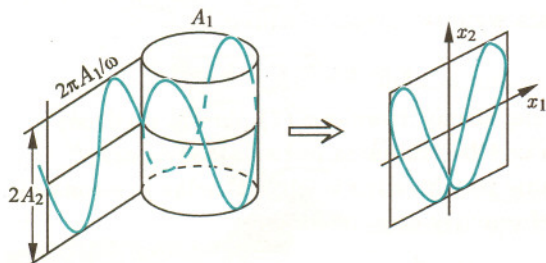
**Przykład 2. Krzywe Lissajous.** Figury Lissajous można oglądać na oscyloskopie, jeśli poda się dwa niezależne oscylujące napięcia na cewki odchylające. Matematycznie opisują się one następująco.

W prostokąt  $|x_1| < A_1$ ,  $|x_2| < A_2$  wpisujemy krzywą

$$(3) \quad x_1 = A_1 \sin(t + \alpha_1), \quad x_2 = A_2 \sin(\omega t + \alpha_2).$$

Poruszający się punkt materialny dokonuje niezależnych drgań: z częstotliwością 1 i amplitudą  $A_1$  w poziomie i z częstotliwością  $\omega$  i amplitudą  $A_2$  w pionie.

Aby znaleźć kształt tej krzywej, weźmy walec z podstawą o promieniu  $A_1$  i taśmę o szerokości  $2A_2$ . Narysujmy na taśmie sinusoidę o okresie  $2\pi A_1/\omega$  i amplitudzie  $A_2$  i naklejmy ją na powierzchnię boczną walca. Okaże się wtedy, że rzut sinusoidy na płaszczyznę  $x_1, x_2$  to właśnie krzywa Lissajous.



Rys. 5.

Kształt krzywej Lissajous w istotny sposób zależy od liczby  $\omega$ . Na przykład, dla  $\omega = 1$  i  $\alpha_1 = \alpha_2$  krzywa (3) to przekątna prostokąta. Dla  $\omega = 1$  i  $\alpha_2 = \alpha_1 + \pi$  dostajemy drugą przekątną.

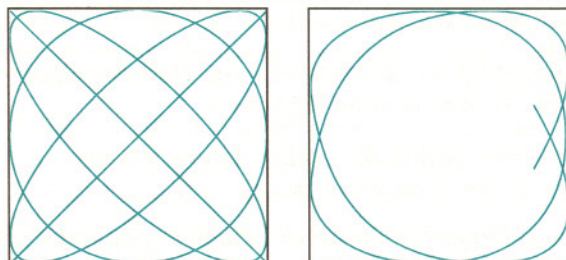
### Zadanie.

(a) Wykazać, że dla  $\omega = 1$  pozostałe krzywe Lissajous są elipsami o środku w 0. Prześledzić, jak zmieniają się przy zmianie  $\alpha_2$  z  $\alpha_1$ .

(b) Dowiedzieć się, co to są wielomiany Czebyszewa i wykazać, że dla  $\omega = n$ ,  $\alpha_1 = -\pi/2$ ,  $\alpha_2 = -n\pi/2$  krzywa Lissajous leży w wykresie wielomianu Czebyszewa.

### Twierdzenie 3.

(a) Jeśli  $\omega$  jest liczbą wymierną, to krzywa Lissajous jest krzywą okresową (zamkniętą). (b) Jeśli  $\omega$  jest liczbą niewymierną, to krzywa Lissajous zapelnia gęsto ekran oscyloskopu.



Rys. 6. Przykłady krzywych Lissajous.

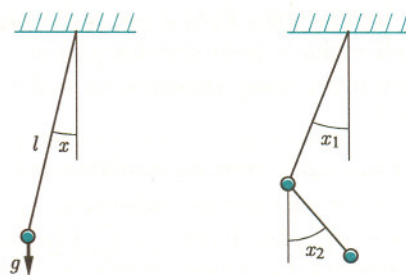
Dla dowodu tego twierdzenia potrzebny nam będzie

**Przykład 3. Małe drgania układu niezależnych wahań.** Równanie wahań w przybliżeniu dla małych drgań (tzn. tam, gdzie  $\sin x \approx x$ ) ma postać

$$\ddot{x} = -(g/l)x$$

( $g$  jest przyspieszeniem ziemskim). Można zawsze dobrać skalę czasu tak, aby współczynnik przy  $x$  wynosił 1. Załóżmy, że mamy dwa niezależne takie wahań (np. jedno podwieszono pod drugim); odpowiada im układ równań

$$(4) \quad \ddot{x}_1 = -x_1, \quad \ddot{x}_2 = -\omega^2 x_2.$$



Rys. 7.

Energia każdego z wahań składa się z energii kinetycznej  $\frac{1}{2}v_i^2$ , gdzie  $v_i = \dot{x}_i$ , oraz z energii potencjalnej  $\frac{1}{2}x_i^2$  (lub  $\frac{1}{2}\omega^2 x_2^2$ ) i jest stała:

$$(5) \quad \frac{1}{2}v_1^2 + \frac{1}{2}x_1^2 = E_1, \quad \frac{1}{2}v_2^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x_2^2 = E_2.$$

Równania (5) określają w czterowymiarowej przestrzeni  $x_1, x_2, v_1, v_2$  dwuwymiarową powierzchnię. Jest to iloczyn kartezjański krzywych zadanych w płaszczyznach fazowych  $x_1, v_1$  i  $x_2, v_2$  obydwu układów. Ponieważ krzywe te są topologicznie

okręgami, więc układ równań (5) opisuje torus  $T^2$  w  $\mathbb{R}^4 = \{(x_1, x_2, v_1, v_2)\}$ .

**Lemat.** Równania (4) mają rozwiązania postaci (3).

Rzeczywiście, przekonujemy się o tym różniczkując dwukrotnie funkcje  $x_{1,2}(t)$ . Przy okazji sprawdzamy, że  $v_1 = A_1 \cos(t + \alpha_1)$ ,  $v_2 = \omega \cos(\omega t + \alpha_2)$ .

Jeśli teraz  $A_1^2 = 2E_1$ ,  $A_2^2 = 2E_2$ , to krzywa fazowa  $\{x_1(t), x_2(t), v_1(t), v_2(t)\}$  leży na torusie (5).

Wprowadźmy jeszcze zmienne kątowe  $\varphi_1, \varphi_2$  na torusie tak, aby

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = v_1/x_1, \quad \operatorname{tg} \varphi_2 = v_2/\omega x_2.$$

Wtedy okaże się, że:

1)  $\varphi_1(t) = t + \alpha_1$ ,  $\varphi_2(t) = \omega t + \alpha_2$ , czyli rozwiązanie układu (4) określa obrotkę torusa.

2) Prostokąt  $|x_1| < A_1$ ,  $|x_2| < A_2$  jest rzutem torusa (5) na płaszczyznę  $x_1, x_2$ .

3) Rzuty krzywych fazowych układu (4) są krzywymi Lissajous w prostokącie.

Stąd wynika Twierdzenie 3.

#### Przykład 4. Ruch w polu centralnym.

Niech  $\vec{x} = (x_1, x_2)$  oznacza wektor w  $\mathbb{R}^2$  i niech  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$  oznacza jego długość. Oznaczmy przez  $\vec{e}_r = \vec{x}/r$  jednostkowy wektor w kierunku  $\vec{x} \neq 0$ , a przez  $\vec{e}_\varphi = (-x_2, x_1)/r$  jednostkowy wektor w kierunku zmian kąta biegunowego  $\varphi$  (rys. 8). Mamy  $\vec{x} = r\vec{e}_r$ .

Ruch punktu materialnego w centralnym polu sił jest opisany wzorem Newtona

$$\ddot{\vec{x}} = F(r)\vec{e}_r.$$

Na przykład, dla wahadła sferycznego w przybliżeniu dla małych drgań mamy  $F(r) = -r$ , a dla zagadnienia Keplera (czyli ruchu w polu grawitacyjnym wytworzonym przez masę umieszczoną w  $\vec{x} = 0$ ) jest  $F(r) = -cr^{-2}$ .

Z mechaniki wiadomo, że w takim układzie jest zachowywana jego energia całkowita  $E = |\dot{\vec{x}}|^2/2 + U(r)$ , gdzie  $U(r) = -\int_{r_0}^r F(s)ds$  jest energią potencjalną. Co więcej, drugie prawo Keplera mówi, że zachowany jest moment pędu punktu względem początku układu współrzędnych.

**Moment pędu** to iloczyn wektorowy promienia wodzącego  $\vec{x}$  i wektora pędu  $\dot{\vec{x}}$  (masę przyjęliśmy równą 1). Mamy zatem

$$M = |\vec{x} \times \dot{\vec{x}}| = |x_1 \dot{x}_2 - x_2 \dot{x}_1| = \text{const}.$$

#### Zadanie.

Udowodnić, że  $M(t) = \text{const}$  i że jest to równoważne stałości prędkości połowej: w jednakowych odstępach czasu wektor wodzący zakreśla równe pola (rys. 8).

Niestety, teraz musimy dokonać pewnych przekształceń. Chcemy rozdzielić zmienne i dlatego przejdziemy do biegunowego układu współrzędnych  $r, \varphi$ .

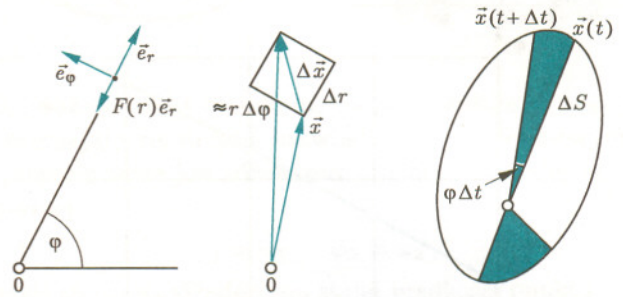
**Lemat.** Zachodzą zależności:

$$(6) \quad \ddot{\vec{x}} = \ddot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$$

oraz

$$\dot{\vec{e}}_r = \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi, \quad \dot{\vec{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}\vec{e}_r.$$

Dowód na podstawie rysunku 8 pozostawiamy Czytelnikowi.



Rys. 8.

Z lematu wynika, że

$$M = |(r\vec{e}_r) \times (\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi)| = r^2\dot{\varphi}, \quad \text{dla } \dot{\varphi} > 0.$$

Aby zapisać równania Newtona w nowych współrzędnych, różniczkujemy równanie (6) wykorzystując powyższe wzory. Dostaniemy

$$\ddot{\vec{x}} = (\ddot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi) = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\vec{e}_\varphi.$$

Ponieważ siła wynosi  $F(r)\vec{e}_r$ , więc porównanie składowych radialnych daje  $\ddot{r} = F(r) + r\dot{\varphi}^2$ . Jeśli uwzględnimy prawo zachowania momentu pędu

$$(7) \quad \dot{\varphi} = M/r^2,$$

to zmienna  $r$  wydzieli się: otrzymamy równanie

$$\ddot{r} = -V'(r),$$

gdzie  $V(r) = U(r) + M^2/2r^2$  jest tzw. efektywną energią potencjalną. Jednokrotne scałkowanie prowadzi do prawa zachowania energii,  $\frac{1}{2}\dot{r}^2 + V(r) \equiv E$ , które pozwala wyliczyć prędkość zmian  $r$ :

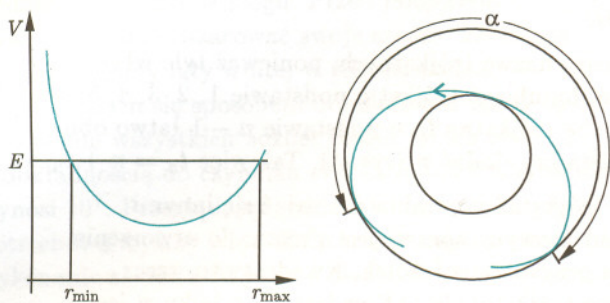
$$\dot{r} = \pm \sqrt{2(E - V(r))}.$$

Z drugiej strony, równanie (7) określa prędkość zmian  $\varphi$ . Oba równania pozwalają wyznaczyć równanie trajektorii  $\varphi = \varphi(r)$ . Dzieliąc je stronami, czyli eliminując czas, dostajemy

$$(8) \quad \frac{d\varphi}{dr} = \frac{M/r^2}{\pm \sqrt{2(E - V(r))}}.$$

To równanie można po prostu scałkować (choć nie zawsze odpowiednia całka wyraża się przez kwadratury). My ograniczymy się do opisu ruchu.

Załóżmy, że wykres efektywnego potencjału ma kształt pokazany na rysunku 9. Równanie (8) może zachodzić tylko dla  $V(r) < E$ , czyli w pierścieniu  $r_{\min} \leq |\vec{x}| \leq r_{\max}$ . Ten pierścień pełni rolę prostokąta z teorii figur Lissajous.



Rys. 9.

Gdy w (8) mamy znak + i  $r$  rośnie, to rośnie także i  $\varphi$ . W pewnym momencie  $r$  osiąga wartość maksymalną (apocentrum). Następuje zmiana znaku w pierwiastku,  $r$  zaś zaczyna maleć. Potem  $r$  osiąga perycentrum  $r_{\min}$ , znowu zaczyna rosnąć i sytuacja powtarza się.

Nietrudno tu dostrzec obroty, np. kolejne powroty na okrąg apocentryczny. Jeśli kąt  $\alpha$  z rysunku 9 jest niewspółmierny z  $\pi$ , to trajektoria dowolnego punktu jest gęsta w pierścieniu, a w przeciwnym przypadku jest krzywą zamkniętą. Można tutaj też znaleźć torus  $T^2 \subset \mathbb{R}^4$  z obmotką, której rzut jest naszą trajektorią.

Jako ciekawostkę przytoczę przekształcenie (znajdzone przez K. Bolina), które zamienia układ wahadła sferycznego w układ Keplera: jeśli zespolona funkcja  $z = z(t) = x_1 + ix_2 \in \mathbb{C}$  spełnia równanie Hooke'a  $\ddot{z} = -z$ , to zmienna  $Z = z^2$  z nowym czasem  $\tau$ , dla którego moment pędu pozostaje stały, spełnia równanie powszechnego ciążenia  $d^2Z/d\tau^2 = -cZ/|Z|^3$ . Otrzymuje się stąd okresowość orbit keplerowskich, a nawet więcej, można wykazać, że gdy zmienna  $z(t)$  zakreśla elipsę o środku w 0, to  $Z(\tau) = z^2(t)$  zakreśla elipsę z ogniskiem w 0 (pierwsze prawo Keplera). Zainteresowanym polecam książkę V.I. Arnolda *Huygens i Barrow, Newton i Hooke* (po rosyjsku).

Przykłady, których nie udało się nam omówić, to m.in. geodezyjne na powierzchni obrotowej i na elipsoidzie trójosiowej, oraz ogólne całkwalne układy hamiltonowskie. Okazuje się, że jeśli układ jest całkwalny, to przestrzeń jego możliwych położen rozbija się na torusy, na których trajektorie tworzą obmotki (twierdzenie Liouville'a–Arnolda).



## Zadania

Redaguje Łukasz WIECHECKI

**M 838.** Dany jest taki trójkąt  $ABC$ , że  $|AB| = |BC|$  oraz  $\angle BAC = 80^\circ$ . Punkt  $T$  należy do odcinka  $BC$  i  $|BT| = |AC|$ . Znaleźć kąt  $TAC$ .

Rozwiązanie na str. 12

**M 839.** Niech  $n, m, k$  będą liczbami naturalnymi,  $m > n$ . Która liczba jest większa:

$$\sqrt{n + \sqrt{m + \sqrt{n + \dots}}} \quad \text{czy} \quad \sqrt{m + \sqrt{n + \sqrt{m + \dots}}}$$

W każdym z powyższych wyrażeń jest  $k$  pierwiastków kwadratowych, a  $n$  i  $m$  występują na przemian.

Rozwiązanie na str. 3

**M 840.** Wyznaczyć taki najmniejszy przedział  $A$  liczb rzeczywistych, że dla każdego  $a \in A$  istnieją  $b, c \in A$ , spełniające układ równań

$$\begin{cases} a + b + c = 15, \\ ab + ac + bc = 72. \end{cases}$$

Rozwiązanie na str. 2

Przygotowali Eryk i Wojciech KOPCZYŃSCY

Poniższe zadania łatwo jest rozwiązać stosując rachunek całkowity. Zachęcamy do rozwiązania ich bez stosowania rachunku całkowitego.

**F 471.** Obliczyć energię potencjalną samooddziaływania grawitacyjnego jednorodnej kuli o masie  $M$  i promieniu  $R$ .

Rozwiązanie na str. 13

**F 472.** Obliczyć moment bezwładności jednorodnego stożka o masie  $M$  i promieniu podstawy  $R$  względem osi symetrii.

Rozwiązanie na str. 13

