Różne rozkłady na sumy kwadratów

Lew KURLANDCZYK i Andrzej NOWICKI

Sankt Petersburg, Toruń, 22 września 1997 r.

Liczba 1105 jest najmniejszą liczbą naturalną mającą cztery różne rozkłady na sumę dwóch kwadratów liczb naturalnych:

$$\begin{aligned} 1105 &= 24^2 + 23^2 \\ 1105 &= 31^2 + 12^2 \\ 1105 &= 32^2 + 9^2 \\ 1105 &= 33^2 + 4^2. \end{aligned}$$

W rozkładach występują kolejne liczby naturalne: 31, 32 i 33. Podobną własność mają liczby 12025, 66625 oraz 252601:

$$\begin{aligned} 12025 &= 107^2 + 24^2 & 66625 &= 255^2 + 40^2 & 252601 &= 499^2 + 60^2 \\ 12025 &= 108^2 + 19^2 & 66625 &= 256^2 + 33^2 & 252601 &= 500^2 + 51^2 \\ 12025 &= 109^2 + 12^2, & 66625 &= 257^2 + 24^2, & 252601 &= 501^2 + 40^2. \end{aligned}$$

Każda z nich ma co najmniej trzy różne rozkłady na sumę dwóch kwadratów i w rozkładach występują trzy kolejne liczby naturalne. Takich liczb naturalnych istnieje nieskończenie wiele. Omawianą własność ma, na przykład, każda liczba naturalna A_n określona wzorem

$$A_n = (1 + 4n^2)(1 + 4n^4),$$

gdzie n jest liczbą naturalną większą od 1. Rozkłady w tym przypadku są następujące:

$$\begin{aligned} A_n &= (4n^3 - 1)^2 + (2n^2 + 2n)^2 \\ A_n &= (4n^3)^2 + (2n^2 + 1)^2 \\ A_n &= (4n^3 + 1)^2 + (2n^2 - 2n)^2. \end{aligned}$$

Występują tu kolejne liczby naturalne: $4n^3 - 1$, $4n^3$ oraz $4n^3 + 1$. Postać A_n mają wszystkie liczby, które przedstawiliśmy na początku:

$$1105 = A_2, \quad 12025 = A_3, \quad 66625 = A_4, \quad 252601 = A_5.$$

Istnieją jednak liczby mające omawianą własność, które nie są postaci A_n. Takimi są, na przykład, liczby 292825 i 1026745:

$$\begin{aligned} 292825 &= 539^2 + 48^2 & 1026745 &= 1011^2 + 68^2 \\ 292825 &= 540^2 + 35^2 & 1026745 &= 1012^2 + 51^2 \\ 292825 &= 541^2 + 12^2, & 1026745 &= 1013^2 + 24^2. \end{aligned}$$

Twierdzenie. *Niech M będzie liczbą naturalną. Następujące dwa warunki są równoważne:*

(1) *istnieją takie liczby naturalne $n > 1$, k_1, k_2, k_3, że*

$$M = (n-1)^2 + k_1^2 = n^2 + k_2^2 = (n+1)^2 + k_3^2;$$

(2) *istnieją takie liczby naturalne $b > a$, że $a^2 + b^2 + 1$ jest liczbą kwadratową oraz $M = a^2b^2 + a^2 + b^2 + 1$.*

Dowód. Załóżmy, że zachodzi warunek (1). Wówczas z równości $4n = (n+1)^2 - (n-1)^2 = k_1^2 - k_3^2$ wynika, że liczby $k_1 - k_3$ i $k_1 + k_3$ są parzyste. Niech $k_1 - k_3 = 2a$ oraz $k_1 + k_3 = 2b$, gdzie b i a są pewnymi liczbami naturalnymi, przy czym $b > a$.

Wtedy $k_1 = b + a$, $k_3 = b - a$, $n = ab$ oraz

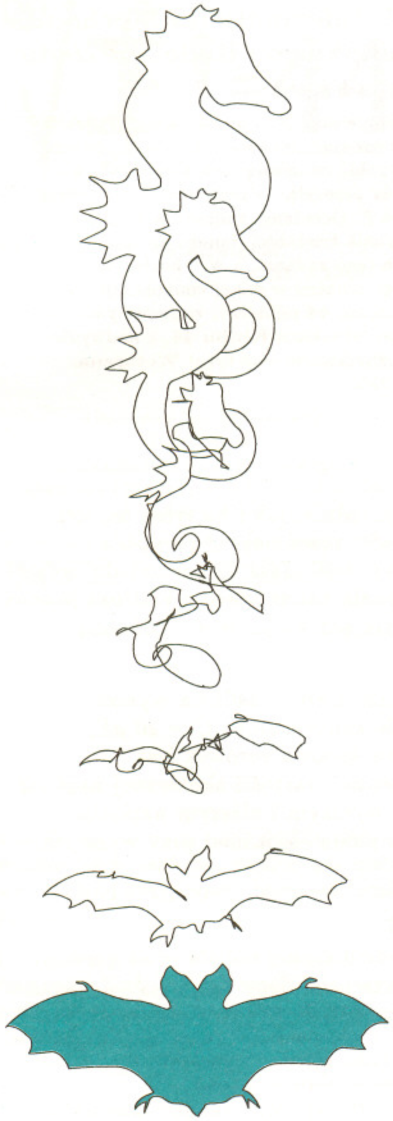
$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + 1 &= (a^2 + b^2 + 2ab) + (a^2b^2 - 2ab + 1) - a^2b^2 = \\ &= (a+b)^2 + (ab-1)^2 - a^2b^2 = \\ &= k_1^2 + (n-1)^2 - n^2 = k_2^2, \end{aligned}$$

czyli $a^2 + b^2 + 1$ jest liczbą kwadratową równą k_2^2. Ponadto $M = n^2 + k_2^2 = a^2b^2 + a^2 + b^2 + 1$. Wykazaliśmy więc implikację (1) $\Longrightarrow$ (2).

Rozwiązanie zadania M 838.
Niech O będzie środkiem koła (o promieniu R) opisanego na trójkącie ABC, a T' przecięciem prostej AO z odcinkiem BC. Wtedy $\angle OBA = \frac{1}{2}\angle CBA = 10° = \angle OAB$, skąd $\angle BOT' = 20°$, $\angle BT'O = 150°$. Zatem z twierdzenia sinusów w trójkątach OBT' i ABC mamy

$$|BT'|/\sin 20° = |OB|/\sin 150° = 2R,$$
$$|AC|/\sin 20° = 2R,$$

czyli $|BT'| = |AC|$. Z tego wynika, że $T' = T$ i $\angle TAC = 70°$.



Załóżmy teraz, że spełniony jest warunek (2). Wówczas przyjmujemy:

$$n = ab, \quad k_1 = a + b, \quad k_2 = \sqrt{a^2 + b^2 + 1}, \quad k_3 = b - a$$

i bez trudu sprawdzamy, że zachodzi warunek (1).

Powyższe twierdzenie opisuje wszystkie liczby naturalne mające rozkłady na sumę dwóch kwadratów, w których występują kwadraty trzech kolejnych liczb naturalnych.

Pytanie. *Czy w rozkładach danej liczby naturalnej na sumę dwóch kwadratów mogą pojawić się kwadraty czterech kolejnych liczb naturalnych?*

Odpowiedź na to pytanie jest negatywna. Przypuśćmy bowiem, że dla pewnych liczb naturalnych $n > 1$, k_1, k_2, k_3 i k_4 zachodzą równości

$$(n-1)^2 + k_1^2 = n^2 + k_2^2 = (n+1)^2 + k_3^2 = (n+2)^2 + k_4^2.$$

Wykorzystując dwukrotnie udowodnione twierdzenie stwierdzamy, że istnieją wówczas takie liczby naturalne a, b, c, d, że $b > a$, $d > c$, $cd = n + 1 = ab + 1$, $a^2 + b^2 + 1 = (c+d)^2$ oraz $c^2 + d^2 + 1 = (b-a)^2$.

Przypuśćmy teraz, że a jest liczbą parzystą. Wtedy liczby c i d są nieparzyste (gdyż $cd = ab + 1$), a zatem liczba $a^2 + b^2 + 1$ (która jest równa $(c+d)^2$) jest podzielna przez 4. Ale a^2 jest podzielne przez 4, więc przez 4 podzielna jest liczba $b^2 + 1$. Otrzymaliśmy sprzeczność. Liczba postaci $b^2 + 1$ nigdy nie jest podzielna przez 4. Resztą z dzielenia tej liczby przez 4 jest 1 (gdy b jest parzyste) lub 2 (gdy b jest nieparzyste).

Wykazaliśmy zatem, że a jest liczbą nieparzystą. W ten sam sposób wykazujemy, że b jest liczbą nieparzystą. Następnie wykazujemy (w podobny sposób), że liczby c i d są również nieparzyste. Teraz patrzymy na równość

$$a^2 + b^2 + 1 = (c+d)^2.$$

Lewa strona tej równości jest liczbą nieparzystą, a prawa strona jest liczbą parzystą. Sprzeczność ta kończy nasze uzasadnienie negatywnej odpowiedzi na postawione pytanie.

Na zakończenie spójrzmy jeszcze na rozkłady liczby 120250.

$$\begin{aligned}
120250 &= 255^2 + 235^2\\
120250 &= 297^2 + 179^2\\
120250 &= 305^2 + 165^2\\
120250 &= 315^2 + 145^2\\
120250 &= 339^2 + 73^2\\
120250 &= 341^2 + 63^2\\
120250 &= 343^2 + 51^2\\
120250 &= 345^2 + 35^2
\end{aligned}$$

Występują tu cztery kolejne liczby nieparzyste: 339, 341, 343 i 345.

Rozwiązanie zadania F 471.
Niech $a = M/R^3$. Oznaczmy szukaną energię przez $V(M,R)$. Energia ta musi być ujemna i ze względów wymiarowych wprost proporcjonalna do M^2, a odwrotnie proporcjonalna do R: $V(M,R) = -kM^2\mathrm{G}/R$, gdzie G jest stałą grawitacyjną, a k współczynnikiem liczbowym. Jeśli zwiększymy (przy stałej gęstości) promień o ΔR, to energia zwiększy się o ΔV. Obliczamy, że $\Delta V = V(a(R+\Delta R)^3, R+\Delta R) - V(aR^3, R) = -ka^2\mathrm{G}(R+\Delta R)^5 + ka^2\mathrm{G}R^5 = -5ka^2\mathrm{G}R^4\Delta R + O((\Delta R)^2)$, dla $\Delta R \to 0$. (Piszemy $g(x) = O(f(x))$, dla $x \to x_0$, jeśli dla pewnej stałej C i dla pewnego 0toczenia x_0 nierówność $|g(x)| \le C|f(x)|$ zachodzi dla każdego $x \ne x_0$ należącego do tego otoczenia.) Z drugiej strony, rozważając energię potencjalną oddziaływania grawitacyjnego pomiędzy kulą o promieniu R a otaczającą ją warstwą kulistą o promieniu wewnętrznym R i zewnętrznym $R + \Delta R$ (oba ciała mają jednakową gęstość), otrzymamy $-\Delta MM\mathrm{G}/R \le \Delta V \le -\Delta MM\mathrm{G}/(R+\Delta R)$, gdzie $\Delta M = a(R+\Delta R)^3 - aR^3 = 3aR^2\Delta R + O((\Delta R)^2)$, dla $\Delta R \to 0$, jest masą warstwy kulistej. Zatem $\Delta V = -3a^2\mathrm{G}R^4\Delta R + O((\Delta R)^2)$, dla $\Delta R \to 0$. Porównując oba wyrażenia na ΔV i pomijając poprawki kwadratowe w ΔR (w tym energię samooddziaływania warstwy kulistej), otrzymamy $k = 3/5$. Ostatecznie,

$$V(M,R) = -\frac{3M^2\mathrm{G}}{5R}.$$

Rozwiązanie zadania F 472.
Namawiamy do prawie dosłownego powtórzenia rozumowania przytoczonego w rozwiązaniu poprzedniego zadania. Wynik,

$$I(M,R) = \frac{3MR^2}{10},$$

nie zależy od kąta rozwarcia stożka.