O początkowych cyfrach symboli Newtona

Waldemar POMPE

Grzegorz Bartczak i Andrzej Nowicki (*Początkowe cyfry symboli Newtona*, *Delta* 9/1997, str. 14) dowodzą następującego ciekawego twierdzenia:

Twierdzenie 1. *Niech C i k będą dowolnymi liczbami naturalnymi. Wówczas istnieje taka liczba naturalna n, że początkowe cyfry rozwinięcia dziesiętnego liczby $\binom{n}{k}$ pokrywają się odpowiednio z cyframi rozwinięcia dziesiętnego liczby C.*

Autorzy pytają też, czy powyższą własność mają liczby postaci $\binom{2n}{n}$ lub $n!$. W przypadku liczb $n!$ odpowiedź jest pozytywna, a pytanie pojawiało się już na olimpiadach matematycznych w różnych krajach (patrz np. *Delta* 11/1994, str. 16). Poniżej uogólnimy twierdzenie 1, a także udowodnimy, że istotnie liczby $\binom{2n}{n}$ mają własność opisaną w powyższym twierdzeniu.

Twierdzenie 2. *Dany jest ciąg (a_n) liczb dodatnich rozbieżny do nieskończoności oraz liczba naturalna C. Jeśli*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 + \frac{1}{C}, \tag{1}$$

to ciąg (a_n) zawiera nieskończenie wiele wyrazów, których początkowe cyfry rozwinięcia dziesiętnego są odpowiednio równe cyfrom rozwinięcia dziesiętnego liczby C.

Oto przykład zastosowania twierdzenia 2. Niech W będzie wielomianem stopnia dodatniego o współczynnikach rzeczywistych, którego współczynnik przy najwyższej potędze jest dodatni. Wówczas począwszy od pewnego miejsca ciąg $(W(n))$ jest ciągiem liczb rzeczywistych dodatnich, $W(n) \to \infty$ dla $n \to \infty$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{W(n+1)}{W(n)} = 1$. Zatem, dla każdej liczby naturalnej C w ciągu $\big(W(n)\big)$ występuje nieskończenie wiele wyrazów, których początkowe cyfry rozwinięcia dziesiętnego są odpowiednio równe cyfrom liczby C. W szczególności, biorąc $W(x) = \dbinom{x}{k} = \dfrac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{k!}$, otrzymujemy twierdzenie 1.

Dowód twierdzenia 2: Rozpatrzmy przedziały:

$$\big[j + \log C, j + \log(C+1)\big], \qquad j = 0, 1, 2, \dots \tag{2}$$

Na mocy ciągłości i monotoniczności funkcji logarytmicznej nierówność (1) możemy przepisać w następującej równoważnej postaci

$$\lim_{n\to\infty} (\log a_{n+1} - \log a_n) < \log(C+1) - \log C\,.$$

Istnieje więc taka liczba naturalna m, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq m$

$$\log a_{n+1} - \log a_n < \log(C+1) - \log C\,.$$

Innymi słowy, od pewnego miejsca różnice między kolejnymi wyrazami ciągu $(\log a_n)$ są mniejsze niż długość każdego z przedziałów (2). A ponieważ $\log a_n \to \infty$, więc któryś z wyrazów ciągu $(\log a_n)$ znajdzie się wewnątrz któregoś z przedziałów (2). Dla pewnych $k, m \in \mathbf{N}$ mamy wówczas

$$k + \log C \leq \log a_m < k + \log(C+1)\,,$$

czyli $C \cdot 10^k \leq a_m < (C+1) \cdot 10^k$. Początkowe cyfry rozwinięcia dziesiętnego a_m pokrywają się więc z kolejnymi cyframi rozwinięcia dziesiętnego liczby C.

Udowodnimy teraz, że takich liczb a_m jest nieskończenie wiele. Przypuśćmy, że tych liczb w ciągu (a_n) jest skończenie wiele i niech a_{m_0} będzie ostatnią z nich. Wtedy ciąg $(a_{m_0+n})_{n=1}^{\infty}$ spełnia założenia twierdzenia 2. Zatem dla pewnego $p > m_0$ początkowe cyfry rozwinięcia dziesiętnego liczby a_p pokrywają się z odpowiednimi cyframi rozwinięcia dziesiętnego liczby C, wbrew przypuszczeniu, że a_{m_0} była ostatnią taką liczbą. ■

Twierdzenie 2 nie stosuje się do ciągu $a_n = \binom{2n}{n}$, który – mówiąc nieściśle – zbyt szybko rośnie. Podstawą do dalszych rozważań będzie następujące twierdzenie, które w *Delcie* wielokrotnie już było omawiane.

Twierdzenie 3. *Dana jest liczba niewymierna dodatnia α oraz liczby rzeczywiste $a < b$. Niech $x \geq a$. Wówczas istnieje taka liczba naturalna m, że któryś z wyrazów skończonego ciągu*

$$x_n = x + n\alpha\,, \qquad \textit{gdzie} \quad n = 0, 1, 2, \ldots, m,$$

leży w jednym z przedziałów (a, b), $(1 + a, 1 + b)$, $(2 + a, 2 + b)$, ... Liczbę m możemy obliczyć znając jedynie liczby α i $b - a$.

Korzystając z tego rezultatu udowodnimy

Twierdzenie 4. *Dany jest ciąg liczb dodatnich (a_n). Jeśli istnieje granica*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = g > 1$$

i $\log g$ jest liczbą niewymierną, to dla dowolnej liczby naturalnej C w ciągu (a_n) występuje nieskończenie wiele wyrazów, których początkowe cyfry rozwinięcia dziesiętnego są odpowiednio równe cyfrom rozwinięcia dziesiętnego liczby C.

Dowód: Skorzystamy z twierdzenia 3 dla $\alpha = \log g$ oraz $a = \frac{2}{3}\log C + \frac{1}{3}\log(C+1)$, $b = \frac{1}{3}\log C + \frac{2}{3}\log(C+1)$. Ponieważ

$$\lim_{n\to\infty} (\log a_{n+1} - \log a_n) = \log g > 0\,, \tag{4}$$

więc $\log a_n \to \infty$. Zatem bez straty ogólności możemy przyjąć, że $\log a_n \geq a$ dla każdego n. Skoro znamy już liczby α i $b - a$, możemy obliczyć odpowiadającą im liczbę m, o której jest mowa w twierdzeniu 3. Na mocy równości (4) istnieje taka liczba naturalna s, że

$$|\log a_{n+1} - \log a_n - \alpha| < \frac{b-a}{m} \qquad \text{dla każdego } n \geq s\,.$$

Przyjmijmy $x = \log a_s$. Wówczas, na mocy twierdzenia 3, istnieje taka liczba naturalna k oraz liczba $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, że

$$k + a < \log a_s + j\alpha < k + b\,. \tag{5}$$

Z drugiej zaś strony, z nierówności trójkąta otrzymujemy

$$|\log a_{s+j} - \log a_s - j\alpha| \leq |\log a_{s+j} - \log a_{s+j-1} - \alpha| +$$

$$+ |\log a_{s+j-1} - \log a_{s+j-2} - \alpha| + \ldots + |\log a_{s+1} - \log a_s - \alpha| < j \cdot \frac{b-a}{m} \leq b - a\,.$$

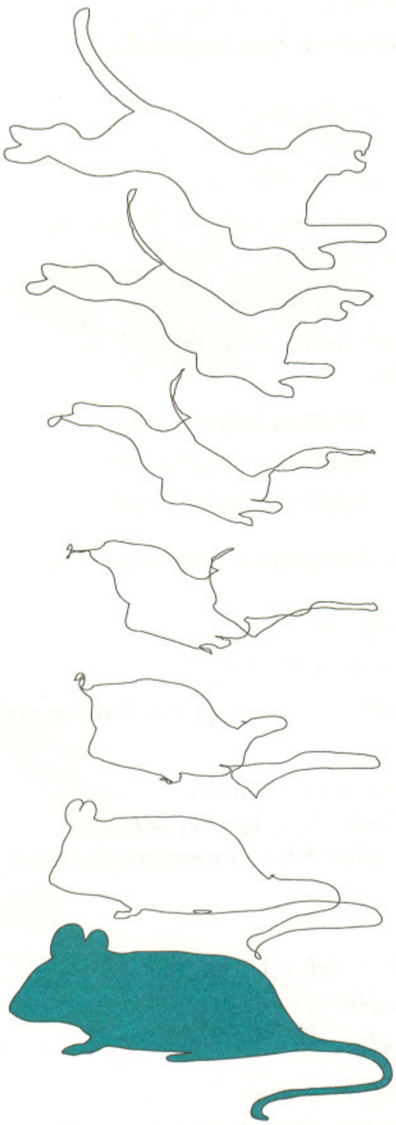
Stąd

$$-b + a < \log a_{s+j} - \log a_s - j\alpha < b - a\,. \tag{6}$$

Dodając stronami nierówności (5) i (6) dostajemy

$$k + \log C < \log a_{s+j} < k + \log(C+1), \qquad \text{czyli} \qquad C \cdot 10^k < a_{s+j} < (C+1) \cdot 10^k\,.$$

Oznacza to, że początkowe cyfry rozwinięcia dziesiętnego liczby a_{s+j} pokrywają się z odpowiednimi cyframi rozwinięcia dziesiętnego liczby C. Dowód, że takich liczb w ciągu (a_n) jest nieskończenie wiele, jest identyczny jak w przypadku twierdzenia 2, więc go pominiemy. ■



Zastosujmy twierdzenie 4 do ciągu $a_n = \binom{2n}{n}$. Mamy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n+2}{n+1} = 4\,.$$

Z twierdzenia o jednoznaczności rozkładu liczb naturalnych na czynniki pierwsze wynika, że liczba $\log 4$ jest niewymierna. Zatem

dla dowolnej liczby naturalnej C istnieje nieskończenie wiele liczb postaci $\binom{2n}{n}$, których początkowe cyfry rozwinięcia dziesiętnego pokrywają się z cyframi rozwinięcia dziesiętnego liczby C.

Twierdzenie 4 stosuje się również do wielu innych ciągów, na przykład: $a_n = 2^n$, $a_n = 7^n$ lub ogólnie $a_n = k^n$, gdzie k jest liczbą naturalną nie będącą całkowitą potęgą liczby 10. Można też wziąć

$$a_n = \binom{3n}{n}, \qquad a_n = 2^n \cdot n^2\,, \qquad a_n = \left[5^n \cdot \sqrt{n}\,\right], \qquad a_n = \left[\frac{17^n + \pi n}{\sqrt[3]{n} + n^7}\right]$$

oraz wiele innych.

Zakończmy pytaniem do Czytelników: Czy istnieje taka liczba naturalna k, że rozwinięcia dziesiętne liczb 2^k i 5^k rozpoczynają się od układu cyfr 1998?