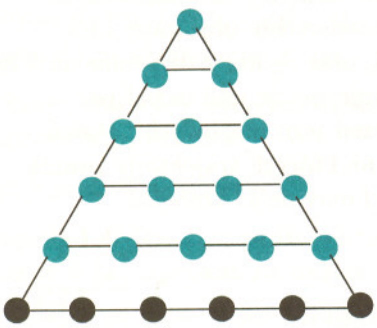
mała delta

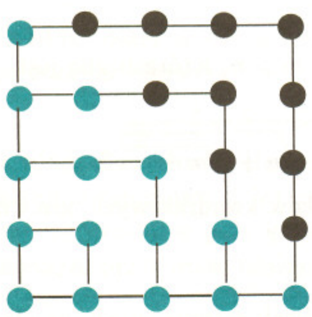
Liczby wielokątne

Liczby 1, 3, 6, 10, 15, ... noszą nazwę trójkątnych, ponieważ tyle właśnie klocków (czy kółek) potrzeba, by ułożyć trójkąt o podstawie 1, 2, 3, 4, 5, itd. (p. *Delta* 2/1997). Znając liczbę trójkątną t_n o podstawie $n-1$ łatwo obliczyć następną, o podstawie n: wystarczy dodać n (rys. 1). Tak więc $t_n = n + t_{n-1}$.



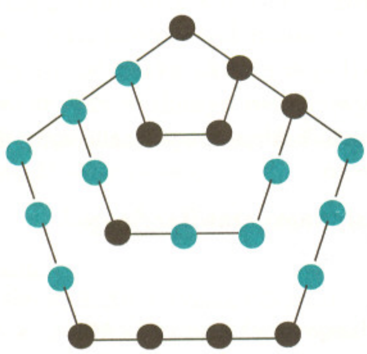
Rys. 1

Jeśli można rozważać liczby trójkątne, to czemu nie zająć się innymi wielokątami? Z liczbami kwadratowymi sprawa jest prosta: do utworzenia kwadratu o boku n potrzeba oczywiście n^2 kółek. Kwadraty to, rzecz jasna, zupełnie inne figury niż trójkąty, ale... Kwadrat k_n o boku n jest sumą dwóch trójkątów o podstawach odpowiednio n i $n-1$ (rys. 2), zatem $k_n = n + 2 \cdot t_{n-1}$.



Rys. 2

A co z pięciokątami? Najprostszy (trywialny) pięciokąt może się składać z jednego kółka, następny, o boku z dwóch kółek, potrzebuje ich pięć; aby z niego otrzymać trzeci, trzeba dodać $2 \cdot 3 + 1$ kółek itd. Ogólniej, aby otrzymać n-ty pięciokąt z $(n-1)$-ego, trzeba do tego ostatniego dodać $2 \cdot n + (n-2)$ kółek. Pięciokąty to, rzecz jasna, zupełnie inne figury niż trójkąty, ale... Pięciokąt p_n o boku n jest sumą trzech trójkątów o podstawie $n-1$ i jeszcze n kółek (rys. 3), więc $p_n = n + 3 \cdot t_{n-1}$.



Rys. 3

Zachęcam do przyjrzenia się sześciokątom, siedmiokątom itd. Czy jest prawdą, że m-kąt o boku n można ułożyć z n kółek i $(m-2)$ trójkątów o podstawie $n-1$?

Zanim przekonacie się o prawdziwości czy fałszywości powyższego twierdzenia, zauważmy, że prawie geometryczną procedurę budowania liczb wielokątnych można opisać w prosty sposób arytmetycznie. Otóż, wypiszmy na początek rząd samych jedynek, a pod nim rząd kolejnych liczb naturalnych:

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Odnotujmy, że każda liczba w dolnym rzędzie (prócz jedynki) jest sumą liczby, która ją poprzedza w tym samym rzędzie, i tej, która jest bezpośrednio nad nią.

Teraz dopiszmy na dole trzeci rząd liczb, utworzonych w sposób opisany przed chwilą: zaczniemy od 1, a potem na k-tym miejscu będziemy wpisywać sumę liczby z miejsca $(k-1)$-ego i liczby stojącej nad miejscem k. Otrzymamy ciąg liczb trójkątnych:

1	**3**	**6**	**10**	**15**	**21**	**28**	**36**	**45**	**55**

Do arytmetycznego opisu kwadratów zastosujmy tę samą procedurę, zaczynając jednak od rzędu samych dwójek. Oto rezultat:

2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
1	**4**	**9**	**16**	**25**	**36**	**49**	**64**	**81**	**100**

Dla pięciokątów zacznijmy od rzędu trójek (czy to przypadek, że $3 = 5 - 2$, tak jak $2 = 4 - 2$ i $1 = 3 - 2$?).

3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
1	4	7	10	13	16	19	22	25	28
1	**5**	**12**	**22**	**35**	**51**	**70**	**92**	**117**	**145**

Otrzymaliśmy liczby pięciokątne (sprawdźcie sami!).

Jak obliczyć liczby sześciokątne, siedmiokątne itd.? Zapewne domyślacie się, jak postąpić – ale dlaczego właśnie tak?

Małą Deltę przygotował Wiktor BARTOL