3/98 (3)

Γ-limatias

CYFROMANIA (3)

Jako pretekst do dalszych rozważań weźmy następujące

Zadanie: Czy potęga trójki może mieć końcówkę 1998-cyfrową złożoną z jednakowych cyfr? A z 999 jednakowych grup dwucyfrowych?

Aby odpowiedzieć na powyższe pytania, musimy najpierw zrozumieć, jakie grupy cyfr mogą być końcówkami potęg trójki.

Reszty z dzielenia potęg trójki przez 5^k zachowują się tak, jak reszty z dzielenia potęg dwójki – tworzą ciąg okresowy o okresie $4\cdot 5^{k-1}$ i wyczerpują wszystkie reszty niepodzielne przez 5. Dochodzi jednak do głosu kwestia reszt z dzielenia przez 2^k, którą teraz się zajmiemy.

Niech $a>1$ będzie liczbą nieparzystą. Reszty z dzielenia a^n przez 2^1 są równe 1, tworzą więc ciąg okresowy o okresie $O_1=1$. Ponieważ a^2-1 dzieli się przez 2^3, więc ciąg reszt z dzielenia a^n przez 2^3 ma okres 2. Najmniejszy okres O_3 może być równy 1 lub 2.

Jeśli $O_3=1$, to także $O_2=1$, jeśli natomiast $O_3=2$, to O_2 może być równe 1 lub 2.

Jaki jest najmniejszy okres O_k ciągu reszt z dzielenia a^n przez 2^k?

Dla nieparzystych $b>1$ i $k\geq 2$ zachodzi implikacja $2^k\|b-1\Rightarrow 2^{k+1}\|b^2-1$. Istotnie, skoro $2^k\|b-1$, to $2\|b+1$ i $2^{k+1}\|(b-1)(b+1)$.

Wykorzystując tę zależność otrzymujemy: $O_1=1$, O_2 jest równe 1 lub 2. Przy tym niech $2^l\|a^{O_2}-1$, gdzie $l\geq 2$. Wtedy $O_2=O_3=\ldots=O_l$ oraz $O_{k+1}=2O_k$ dla $k\geq l$. W przypadku $a=3$ mamy $O_1=1$, $O_2=O_3=2$ oraz $O_k=2^{k-2}$ dla $k\geq 4$.

Reszty z dzielenia potęg trójki przez 2^{1998} mogą więc przyjmować 2^{1996} wartości – nietrudno zobaczyć, że są to liczby podzielne przez 8 z resztą 1 lub 3.

Przejdźmy teraz do przeanalizowania, jakie końcówki mogą mieć potęgi trójki.

$k=1$. Potęgi trójki przy dzieleniu przez 5^1 dają ciąg reszt o okresie 4, a przy dzieleniu przez 2^1 – ciąg o okresie 1. Okres ciągu reszt z dzielenia przez 10^1 (czyli końcówek 1-cyfrowych) jest najmniejszą wspólną wielokrotnością tych okresów i wynosi 4. Są więc 4 możliwe końcówki 1-cyfrowe: 1, 3, 7 i 9.

$k=2$. Okres ciągu końcówek dwucyfrowych wynosi $NWW(20,2)=20$ i tyle jest możliwych końcówek, jakie mogą mieć potęgi trójki. Jest ich 5 razy więcej niż końcówek 1-cyfrowych. Każda końcówka 1-cyfrowa może być rozszerzona do końcówki 2-cyfrowej na 5 sposobów przez dodanie na początku jednej z pięciu cyfr parzystych lub jednej z pięciu cyfr nieparzystych – wynika to z rozważenia ciągu reszt z dzielenia przez 20, który ma okres 4.

Bezpośrednie obliczenia pokazują, że przedostatnia cyfra musi być we wszystkich 4 przypadkach parzysta.

Odpowiedź na pierwsze pytanie postawione w zadaniu jest więc negatywna: ostatnie 2 cyfry potęgi trójki są zawsze różne, bo są różnej parzystości. Na drugie pytanie odpowiemy w następnym numerze Γ-limatiasu.

JWR

MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (2)

Zadanie: Dowieść, że liczba $\sqrt{3-\sqrt{8}}-\sqrt{2}$ jest niewymierna.

Rozwiązanie: Liczba $-\sqrt{2}$ jest niewymierna. Także liczba $\sqrt{3-\sqrt{8}}$ jest niewymierna, bo gdyby była wymierna, to jej kwadrat $3-\sqrt{8}$ też byłby liczbą wymierną, a nie jest. Zatem liczba $\sqrt{3-\sqrt{8}}-\sqrt{2}$ jest niewymierna jako suma liczb niewymiernych.

JWR

MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (3)

Zadanie: Obliczyć całkę $\int\limits_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x$, gdzie

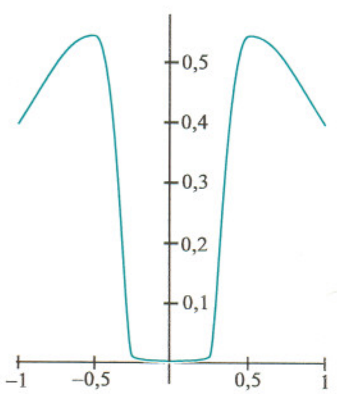
$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2(e^{1/x}+e^{-1/x})} & \text{dla } x\neq 0\\ 0 & \text{dla } x=0\end{cases}.$$

Rozwiązanie: Bez trudu można sprawdzić, że f jest ciągła w zerze (zob. wykres), a zatem obliczenie całki $\int\limits_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x$ nie powinno nastręczać trudności. Ponieważ $f(x)=\frac{1}{x^2(e^{1/x}+e^{-1/x})}$ poza pojedynczym punktem $x=0$, po wykonaniu podstawienia $t=\mathrm{e}^{1/x}$ otrzymujemy

$$\int\limits_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^2(e^{1/x}+e^{-1/x})}=-\int\limits_{1/e}^{e}\frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}=$$

$$=-\mathrm{arctg}\,t\Big|_{1/e}^{e}=-\mathrm{arctg}\,\mathrm{e}+\mathrm{arctg}\,\frac{1}{\mathrm{e}}=\frac{\pi}{2}-2\,\mathrm{arctg}\,\mathrm{e}<0.$$

Jak to możliwe, że całka z funkcji nieujemnej jest mniejsza od 0?



JWR

Korespondencję do Γ-limatiasu prosimy kierować pod adresem:
Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCŁAW; e-mail: jwr@ math.uni.wroc.pl