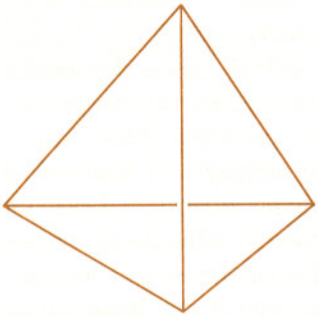
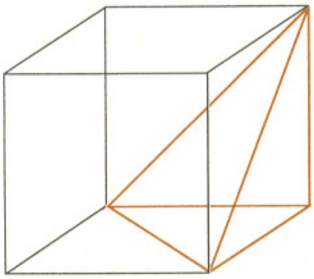
mała delta

Wypełniamy przestrzeń



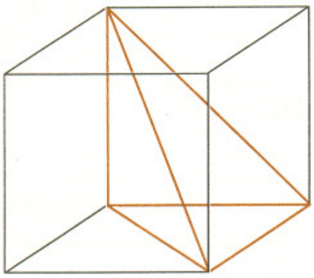
Rys.1

Pudełkami w kształcie czworościanu foremnego (rys. 1) ani w kształcie naroża sześcianu (rys. 2) nie da się szczelnie wypełnić przestrzeni. Powód jest prosty: kąty dwuścienne czworościanu to $\approx 70°33'$ – z takich kątów nie da się układać $360°$, a taką przecież sumę powinny mieć kąty dwuścienne przy każdej krawędzi, gdyby udało się przestrzeń wypełnić. Podobnie, kąt dwuścienny przy dłuższych krawędziach naroża to $\approx 54°44'$, a to też nie pozwoli układać $360°$ nawet z pozostałymi kątami liczącymi po $90°$.



Rys. 2

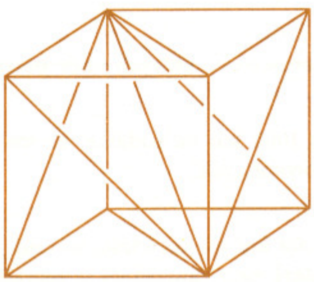
Nadają się natomiast do wypełnienia przestrzeni pudełka w kształcie *czworościanów Hilla*, a konkretnie tego z rysunku 3, który nosi fachową nazwę $H_1(\frac{\pi}{4})$. Pozorny dowód tego faktu jest na rysunku 4. Pokazane jest tam rozbicie sześcianu na sześć czworościanów $H_1(\frac{\pi}{4})$. Geometrycznie jest wszystko w porządku, wszystkie czworościany są przystające, a sześcianami przestrzeń daje się wypełnić. Natomiast z punktu widzenia kartonowych pudełek jest źle: czworościany z rysunku 4 to trzy jednakowe pudełka i trzy ich odbicia lustrzane.



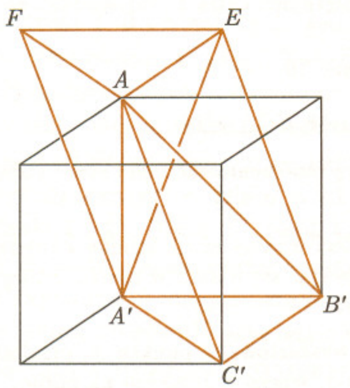
Rys. 3

Zły dowód nie oznacza, że twierdzenie jest fałszywe. Poprawny dowód daje rysunek 5. Z czworościanu $AA'B'C'$ przez obrót o $180°$ wokół prostej przechodzącej przez A' i środek odcinka AB' otrzymujemy czworościan $B'A'AE$, z niego zaś przez obrót o $180°$ wokół prostej przechodzącej przez A i środek odcinka $A'E$ otrzymujemy czworościan $FEAA'$. Obroty są, jak wiadomo, przekształceniami dostępnymi dla tekturowych pudełek (w odróżnieniu od odbić lustrzanych).

Ponieważ obrót o $180°$ przeprowadza każdy odcinek na równy i równoległy do niego, więc równe i równoległe są odcinki AC', $B'E$ i FA', stąd suma trzech czworościanów okazuje się graniastosłupem pochyłym o podstawie trójkątnej.



Rys. 4



Rys. 5

Z takich graniastosłupów, stawiając jeden na drugim, robimy rury o przekroju trójkątnym, a tymi rurami wypełniamy przestrzeń w ten sam sposób, jak trójkątami wypełnia się płaszczyznę.

Znamy dzisiaj nieskończenie wiele kształtów pudełek czworościennych wypełniających przestrzeń, ale nie wiemy, czy jest to pełna lista (i wszyscy wierzą, że nie jest), więc pole do własnych poszukiwań pozostaje szeroko otwarte.

Małą Deltę przygotował Marek KORDOS