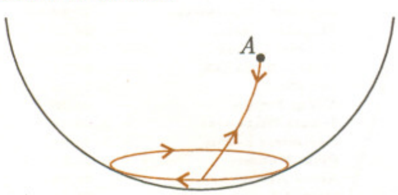
Klub 44

Regulamin

Rozwiązanie zadania F 470.
Każdy zgaduje od razu, że A to biegun północny. Nie jest to jednak jedyne rozwiązanie. Jako punkt A można też wziąć każdy z punktów półkuli południowej, który



leży o 1000 km na północ od równoleżnika mającego długość 1000 km (szerokość południowa $\approx 88°34'$), lub 500 km, lub 250 km itd., słowem $\frac{1000}{n}$ km dla dowolnej liczby naturalnej n (obliczenie ciągu odpowiednich szerokości pozostawiamy Czytelnikom).

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

1. Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego, Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego oraz Redakcja miesięcznika *Delta* organizują konkurs – ligę zadaniową pod nazwą **Klub 44**.

2. Zadania konkursowe są ogłaszane w miesięczniku *Delta*, po cztery zadania w każdym numerze: dwa z matematyki i dwa z fizyki, z dwumiesięczną przerwą (nr 7 i 8 każdego roku).

3. Uczestnikiem ligi może być każdy.

4. Uczestnictwo w lidze polega na rozwiązywaniu zadań konkursowych i przysyłaniu opracowanych rozwiązań do redakcji *Delty*. Uczestnikiem zostaje się po przysłaniu rozwiązania co najmniej jednego zadania.

5. Moment przystąpienia do ligi można wybrać dowolnie. Nie ma konieczności rozwiązywania zadań z każdego miesiąca.

6. Rozwiązania zadań z numeru n należy nadsyłać do końca miesiąca $n+2$ (dodawanie modulo 12; na przykład termin nadsyłania rozwiązań zadań z numeru 11/1997 upłynął 31 stycznia 1998). Szkicowe rozwiązania podawane są w numerze $n+4$.

7. Rozwiązanie każdego zadania powinno być pisane na oddzielnym arkuszu papieru oraz podpisane imieniem i nazwiskiem. Uczniowie proszeni są o podanie klasy, studenci – roku i uczelni. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, z dopiskiem na kopercie: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**.

8. Prace powinny być samodzielne. Jednobrzmiące rozwiązania pisane przez różnych uczestników nie będą brane pod uwagę.

9. Rozwiązanie każdego zadania jest oceniane w skali od 0 do 1, z dokładnością do 0,1. Przy ocenie brana jest pod uwagę nie tylko poprawność merytoryczna i rachunkowa, lecz także pomysłowość metody i elegancja rozwiązania.

10. Każde zadanie otrzymuje współczynnik trudności ustalany po wystawieniu ocen. Współczynnik ten jest liczbą pomiędzy 1 a 4 obliczaną według następującej reguły: jeśli N oznacza liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (matematyka lub fizyka), a S oznacza sumę ocen uzyskanych przez wszystkich uczestników za dane zadanie, wówczas otrzymuje ono współczynnik trudności $WT = 4 - 3S/N$. Za nadesłane rozwiązanie uczestnik otrzymuje w punktacji ligowej liczbę punktów równą iloczynowi uzyskanej oceny przez współczynnik trudności (z zaokrągleniem do dwóch miejsc po przecinku).

11. Niektóre z zadań można znaleźć (w brzmieniu identycznym lub bardzo zbliżonym) wraz z rozwiązaniami w różnych książkach i czasopismach. Uczestnicy, którzy w takich przypadkach przyślą zamiast własnego rozwiązania dokładny odsyłacz do literatury, otrzymają ocenę maksymalną, pod warunkiem, że w cytowanym źródle istotnie znajduje się pełne rozwiązanie (dowód, obliczenie, konstrukcja).

12. Czytelnicy *Delty* mogą zgłaszać propozycje zadań; jeśli zadanie nie jest własnego autorstwa, należy podawać źródło. Gdy zadanie wykorzystane w lidze pochodzi z propozycji uczestnika ligi (tj. osoby, która przysłała już rozwiązanie jakiegoś zadania – por. p. **4**), a dostarczone zostało wraz z rozwiązaniem (choćby szkicowym, ale poprawnym, ewentualnie odsyłaczem do literatury), uczestnik otrzymuje ocenę maksymalną.

13. Punkty zdobyte przez każdego uczestnika za rozwiązania poszczególnych zadań, obliczone według reguły podanej w p. **10**, są sumowane – oddzielnie dla matematyki i dla fizyki. Z chwilą osiągnięcia sumy **44** punktów w jednej z tych dwóch dziedzin uczestnik staje się członkiem **Klubu 44 M** lub **Klubu 44 F**.

14. Po zgromadzeniu **44** punktów (i zostaniu członkiem **Klubu 44**) można w dalszym ciągu brać udział w konkursie ligowym. Nadwyżka punktów ponad wartość **44** zostaje zaliczona na poczet ponownego uczestnictwa w lidze.

15. Trzykrotne uzyskanie członkostwa **Klubu 44 M** (lub **Klubu 44 F**) daje tytuł **Weterana Klubu 44 M** (**Klubu 44 F**).

16. Aby uzyskać informacje o swoich wynikach, należy przysłać do redakcji *Delty* kartkę pocztową (oddzielną dla matematyki i dla fizyki), ofrankowaną i zaadresowaną do siebie, ze sporządzoną tabelką z umieszczonymi w jej rubrykach numerami zadań i z pustymi okienkami do wpisania ocen. Zaleca się przysyłanie takich kartek nie częściej niż co kilka miesięcy, gdy uzbiera się materiał dotyczący rozwiązań kilkunastu zadań.

17. Czołówka listy ligowej jest systematycznie ogłaszana w miesięczniku *Delta*. Nazwisko uczestnika może być wymienione w czołówce z nie zmienioną sumą punktów trzykrotnie; następny raz ukaże się wtedy, gdy uczestnik wykona ruch w górę.

18. Raz do roku, w numerze lutowym, drukowane jest omówienie przebiegu konkursu, prezentowane są w skrócie ciekawsze rozwiązania i uogólnienia oraz ogłaszana jest obszerna czołówka.

19. Członkowie **Klubu 44** są zapraszani na spotkania **Klubu 44**.

20. Organizatorzy zastrzegają sobie wyłączne prawo interpretacji i możliwość zmian regulaminu.

Zadania z matematyki nr 355, 356

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 1998

355. Wyznaczyć wszystkie trójki dodatnich liczb całkowitych (p, x, y), w których p jest liczbą pierwszą, spełniające równanie $p^x - y^p = 1$.

356. Dana jest liczba naturalna n oraz trójkąt ABC, którego kąty są znane ($\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$). Punkty D i E leżą odpowiednio na bokach AB i AC, przy czym $|AD| = \frac{1}{n+1} \cdot |AB|$, $|AE| = \frac{1}{n+1} \cdot |AC|$. Punkty $P_1, \ldots, P_n$ leżą na boku BC, przy czym $|BP_1| = |P_1P_2| = \ldots = |P_{n-1}P_n| = |P_nC| = \frac{1}{n+1} \cdot |BC|$. Obliczyć sumę

$$|\angle DP_1E| + |\angle DP_2E| + \ldots + |\angle DP_nE|.$$

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 10/1997

Przypominamy treść zadań:

347. Funkcje f i g są ciągłe w przedziale $\langle 0;1\rangle$ i różniczkowalne w punktach wewnętrznych tego przedziału. Dowieść, że dla pewnej pary liczb x, $y \in \langle 0;1\rangle$ jest spełniona nierówność $(f(x) + g(y) + 4xy)^2 \geq 1$.

348. Niech n będzie liczbą naturalną. Obliczyć, ile jest liczb $(6n)$-cyfrowych podzielnych przez 7, o wszystkich cyfrach nieparzystych (zapis dziesiętny).

347. Przyjmijmy oznaczenia: $f(0) = a$, $f(1) = b$, $g(0) = c$, $g(1) = d$; $F(x,y) = f(x) + g(y) + 4xy$; $F(0,0) = A$, $F(0,1) = B$, $F(1,0) = C$, $F(1,1) = D$. Zachodzi równość

$$A - B - C + D = (a+c) - (a+d) - (b+c) + (b+d) + 4 = 4,$$

z której wynika, że największa z liczb A, $-B$, $-C$, D jest nie mniejsza niż 1. Zatem $\max\{A^2, B^2, C^2, D^2\} \geq 1$, i mamy tezę zadania. (Analityczne własności funkcji f i g, dane w założeniach, nie są do niczego potrzebne.)

348. Niech A będzie zbiorem liczb postaci

$$N = \sum_{i=0}^{6n-1} a_i \cdot 10^i, \quad \text{gdzie } a_i \in \{1,3,5,7,9\}. \tag{1}$$

Mamy wyznaczyć liczbę elementów zbioru $A_0 = \{N \in A\colon\ N \equiv 0\}$; tu i dalej wszystkie kongruencje są brane (mod 7). Każdej liczbie N postaci (1) przyporządkujmy liczbę

$$f(N) = \sum_{i=0}^{6n-1} b_i \cdot 5^{6n-1-i}, \quad \text{gdzie } b_i = \tfrac{1}{2}(a_i - 1) \in \{0,1,2,3,4\}.$$

Określona w ten sposób funkcja f jest bijekcją zbioru A na zbiór $B = \{0, 1, 2, \ldots, 5^{6n}-1\}$. W zbiorze B jest $\frac{1}{7}(5^{6n}-1)+1$ (czyli $\frac{1}{7}(5^{6n}+6)$) liczb podzielnych przez 7; tworzą one zbiór $B_0 = \{M \in B\colon\ M \equiv 0\}$.

W arytmetyce (mod 7) mamy związki: $3^6 \equiv 5^6 \equiv 1$ oraz $3^i \equiv 5^{6n-i}$ (dla każdego i). Jeśli więc liczba $N \in A$ jest dana wzorem (1), to

$$N \equiv \sum_{i=0}^{6n-1} a_i \cdot 3^i = \sum_{i=0}^{6n-1} (2b_i + 1) \cdot 3^i = 2 \sum_{i=0}^{6n-1} b_i \cdot 3^i + \frac{3^{6n}-1}{2} \equiv$$

$$\equiv 2 \sum_{i=0}^{6n-1} b_i \cdot 5^{6n-i} = 2 \cdot 5 \cdot f(N) \equiv 3f(N).$$

Zatem $N \in A_0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f(N) \in B_0$. Wniosek: zbiór A_0 liczy tyle samo elementów, co zbiór B_0, czyli $\frac{1}{7}(5^{6n}+6)$.

W materiałach matematycznej ligi zadaniowej **Klubu 44** mamy zanotowane blisko 600 nazwisk: tyle osób włączyło się do zabawy (tak to nazywajmy i traktujmy), przysyłając przynajmniej jeden raz rozwiązanie przynajmniej jednego zadania. Oczywiście, znaczna większość uczestników na tym nie poprzestała, a najwierniejsi uczestniczą nieprzerwanie od kilkunastu lat. Zresztą, niekoniecznie „nieprzerwanie”. Czasem ktoś zniknie z naszego pola widzenia, zdawałoby się, że na dobre, po czym, po latach przerwy, przyśle rozwiązanie jakiegoś zadania, które mu szczególnie przypadło do gustu – i znów przystępuje do zabawy. Wcześniej uczestniczył jako uczeń lub student, teraz jako stateczny przedstawiciel zawodu często nie mającego nic wspólnego z matematyką – przysyła listy z innego miasta, a bywa, że z innego kraju.

To znaczy, że nie rozstał się z nami na dobre, że nadal jest naszym wiernym czytelnikiem. Właśnie w minionym roku mieliśmy kilka takich przypadków wdzięcznego *come back*. Bardzo miłe są dla nas te sygnały pamięci.

Jak co roku, omawiamy poniżej rozwiązania istotnie odmienne (i zwykle ciekawsze) od naszych „firmowych”, a także znalezione uogólnienia. Odnotowujemy ponadto te zadania, gdzie poprawne rozwiązania były bardzo nieliczne.

Lista uczestników
ligi zadaniowej **Klub 44 M**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 343 (WT=1,32) i 344 (WT=2,65)
z numeru 6/1997

Witold Bednorz	–	46,82
Przemysław Gadziński	–	5- 45,35
Tomasz Rawlik	–	3- 43,46
Adam Czornik	–	2- 41,29
Krzysztof Zapisek	–	41,22
Maciej Mostowski	–	38,72
Tadeusz Józefczyk	–	2- 38,10
Konrad Patkowski	–	36,27
Tomasz Kulpa	–	1- 34,45
Zbigniew Galias	–	1- 32,14
Witold Bednarek	–	30,43
Bogumiła Piotrowska	–	29,86
Zbigniew Skalik	–	26,19
Andrzej Dudek	–	26,04
Wojciech Maciak	–	25,46
Jan Ciach	–	5- 24,98
Adam Jóźwik	–	24,30
Janusz Olszewski	–	3- 24,18
Kazimierz Serbin	–	3- 23,34
Piotr Kumor	–	3- 22,96
Artur Arciszewski	–	21,98
Michał Lewandowski	–	21,69
Rafał Pikuła	–	21,35
Marcin Sawicki	–	21,20
Zbigniew Sewartowski	–	21,13
Mieczysław Jędrzejowski	–	21,10
Bartosz Putrycz	–	20,31

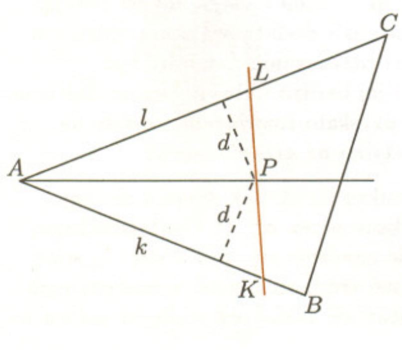
Legenda (przykładowo): stan konta 3-22,96 oznacza, że uczestnik już trzykrotnie zdobył 44 punkty, a w kolejnej (czwartej) rundzie ma 22,96 punktów.

Dwóch uczestników w tej rundzie przekroczyło próg 44 punktów: W. Bednorz – po raz pierwszy, a Weteran P. Gadziński – po raz szósty(!).

Zestawienie obejmuje wszystkich uczestników ligi, którzy spełniają następujące dwa warunki:
– stan ich konta (w aktualnie wykonywanej rundzie) wynosi co najmniej 20 punktów;
– przysłali rozwiązanie co najmniej jednego zadania z rocznika 1995, 1996 lub 1997.
Nie drukujemy więc nazwisk tych uczestników, którzy rozstali się z ligą trzy lata temu (lub dawniej); oczywiście jeśli ktokolwiek z nich zdecyduje się wrócić do naszych matematycznych łamigłówek, jego nazwisko automatycznie wróci na listę. Serdecznie zapraszamy!

Weterani **Klubu 44 M** (w kolejności uzyskiwania statusu Weterana):
J. Janowicz (8), P. Kamiński (5), M. Gałecki (5), J. Uryga (4), A. Pawłowski (4), D. Sowizdrzał, T. Rawlik, M. Mazur, A. Bonk, K. Serbin, J. Ciach (5), M. Prauza, P. Kumor, P. Gadziński (6), K. Jedziniak, J. Olszewski, L. Skrzypek (4), H. Kornacki, T. Wietecha
(jeśli uczestnik przekroczył barierę 44 punktów więcej niż trzy razy, sygnalizuje to cyfra w nawiasie).

Pozostali członkowie **Klubu 44 M** (alfabetycznie; nie powtarzamy nazwisk figurujacych na liscie powyżej):
„dwukrotni":
Z. Bartold, P. Jędrzejewicz, M. Kasperski, H. Kasprzak, T. Komorowski, Z. Koza, D. Kurpiel, J. Małopolski, J. Mikuta, E. Orzechowski, R. Pagacz, K. Pióro, S. Solecki, J. Witkowski, G. Zakrzewski;
„jednokrotni":
T. Biegański, W. Boratyński, M. Czerniakowska, B. Dyda, P. Figurny, M. Fiszer, L. Gasiński, A. Gluza, T. Grzesiak, K. Hryniewiecki, K. Jachacy, J. Kraszewski, A. Krzysztofowicz, P. Kubit, A. Langer, R. Latała, P. Lipiński, P. Lizak, J. Łazuka, J. Mandziuk, M. Marczak, M. Matlęga, R. Mazurek, H. Mikołajczak, M. Mikucki, J. Milczarek, R. Mitraszewski, W. Olszewski, W. Pompe, M. Roman, M. Rotkiewicz, A. Ruszel, J. Siwy, A. Smolczyk, Z. Surduka, T. Szymczyk, W. Szymczyk, K. Trautman, P. Wach, K. Witek, A. Wyrwa, M. Zając, Z. Zaus, K. Zawisławski, P. Żmijewski.



Zadanie **328.** [Z – zbiór płaski; $\forall\, P \in Z$: $\#\{Q \in Z\colon |PQ| = r\} = 2,\ 1,\ 0$ odpowiednio dla $r < 1$, $r = 1$, $r > 1$; czy Z musi być okręgiem?] (współczynnik trudności WT=3,23; liczba poprawnych rozwiązań LPR=2). **M. Mostowski** skonstruował ten sam kontrprzykład, co w rozwiązaniu firmowym. **P. Gadziński** wykazał, że połówkę dowolnej elipsy mającej dostatecznie mały mimośród można uzupełnić do gładkiej krzywej zamkniętej Z o postulowanej własności.

Zadanie **330.** [Liczba $N = \prod_{j=0}^{n-1}(2^n - 2^j)$ dzieli się przez $n!$] (WT=2,17; LPR=12).

Efektowny dowód algebraiczno-kombinatoryczny (nie odwołujący się do żadnych faktów z teorii liczb) przedstawiła **Monika Walkowiak**: N jest liczbą wszystkich macierzy nieosobliwych $n \times n$ nad ciałem dwuelementowym; wynika to stąd, że gdy j początkowych wierszy takiej macierzy zostało już wybrane, wówczas jest dokładnie $2^n - 2^j$ możliwości wyboru kolejnego wiersza, który byłby od nich liniowo niezależny. Macierze złożone z tych samych wierszy (z dokładnością do ich permutacji) można uważać za równoważne, a każda klasa równoważności ma moc $n!$; stąd teza.

Zadanie **334.** [Ciąg o wyrazach $S_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n+k}\left(\frac{n}{n+1}\right)^k$ jest zbieżny] (WT=3,28; LPR=2). W rozwiązaniu firmowym (będącym adaptacją rozwiązania podanego przez **M. Kasperskiego**, autora zadania) zostało wykazane, że granica ciągu (S_n) jest równa $1 - \int_0^1 \mathrm{e}^{1-1/y}\mathrm{d}y$. **P. Gadziński** otrzymuje wynik w postaci innej całki: $\lim S_n = \int_0^\infty (1+x)^{-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$, porównując liczby S_n z sumami Riemanna tej całki na ograniczonych przedziałach. (Sprawdzenie, że uzyskane wyniki są równe, nie jest łatwe!) W każdej z tych metod korzysta się, jawnie lub milcząco, z niebanalnych faktów z „uniwersyteckiej" analizy matematycznej. Na uwagę zasługuje więc znacznie prostsze rozwiązanie, które podał **W. Bednarek**:

Ponieważ $S_n = E_n T_n$, gdzie $E_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \to \mathrm{e}$, $T_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{n}{n+1}\right)^k$, wystarczy wykazać, że ciąg (T_n) jest malejący – stąd wyniknie jego zbieżność, a tym samym również zbieżność ciągu (S_n). Nierówność $b^k - a^k < (b-a)kb^{k-1}$ (zachodząca dla liczb dodatnich $a < b$) daje oszacowanie

$$T_{n+1} - T_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k}\left[\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^k - \left(\frac{n}{n+1}\right)^k\right] - \frac{1}{n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n <$$

$$< \left(\frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1}\right) \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^k - \frac{1}{n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n =$$

$$= \frac{1}{n+1}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n - \frac{1}{n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n,$$

a otrzymana różnica jest ujemna, co wynika z nierówności Bernoulliego $(1+\delta)^n > 1 + n\delta$ dla $\delta = -(n+1)^{-2}$. („Elementarne, Watsonie".)

Zadanie **335.** [$\triangle ABC$: pole S, obwód $2p$; $K \in AB$, $L \in AC$; $|AK| = k$, $|AL| = l$; S' = pole $\triangle AKL$; prosta KL przechodzi przez środek koła wpisanego w $\triangle ABC$ wtedy i tylko wtedy, gdy $2pS' = (k+l)S$] (WT=1,27; LPR=25). Rozwiązanie firmowe było niepotrzebnie skomplikowane (rachunek na wektorach!). Przysłane rozwiązania są w większości znacznie prostsze: niech P będzie punktem przecięcia prostej KL z dwusieczną kąta A i niech d będzie odległością punktu P od prostych AB i AC; wówczas $2S' = (k+l)d$, więc

$$2pS' = (k+l)S \iff S = pd \iff d = \text{promień koła wpisanego} \iff$$
$$\iff P = \text{środek koła wpisanego}.$$

Zadanie **338.** [Dowieść, że $\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\binom{2n}{k}k^n = 0$] ($WT$=1,97; LPR=15). Przedstawiono wiele dowodów tej nietrudnej tożsamości: różniczkowanie funkcji $(\mathrm{e}^x - 1)^{2n}$ (jak w rozwiązaniu firmowym); różne dowody indukcyjne; argumenty kombinatoryczne. Każda z zastosowanych metod (także i ta z rozwiązania firmowego) daje po niewielkiej modyfikacji rezultat nieco ogólniejszy: $\sum_{k=0}^{N}(-1)^k\binom{N}{k}k^n = 0$, jeśli $N > n$; zwrócili na to uwagę prawie wszyscy rozwiązujący.
[Wynik ten uzyskał już L. Euler (Novi Comm. Ac. Petrop. 13 (1768), 28–30).]

Zadanie **342.** [Wielościan, który nie zawiera czworościanu o objętości 1, jest zawarty w czworościanie o objętości < 8] (WT=2,94; LPR=4). Uczestnicy ligi zostali tu (przez omyłkę, nie celowo) „wpuszczeni w maliny”: teza nie jest prawdziwa! (Staje się prawdziwa, gdy liczbę 8 zastąpić przez 27 – ale to już inne zadanie; komentarz w numerze 9/1997.) Błąd zauważyli: **W. Bednorz**, **P. Gadziński**, **P. Kumor**, **T. Rawlik**.

Zadanie **344.** [$A = \{\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2/a_{n+1}\colon 1 = a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \ldots > 0\}$; $\inf A = ?$] (WT=2,65; LPR=6). **P. Gadziński** oraz **P. Żmijewski** przysłali rozwiązania nie różniące się istotnie od firmowego. **W. Bednarek**, **W. Bednorz** oraz **P. Kumor** przysłali rozwiązania oparte na lemacie:

$$a_0 \geq a_1 \geq \ldots \geq a_n > 0 \implies \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i^2}{a_{i+1}} \geq 2^{\alpha_n} a_0, \qquad \text{gdzie} \quad \alpha_n = 2 - 2^{1-n};$$

lemat łatwo udowodnić przez indukcję. Zatem suma każdego z rozpatrywanych szeregów (z $a_0 = 1$) jest ≥ 4; ciąg $a_n = 2^{-n}$ generuje sumę równą 4, więc $\inf A = 4$. Autorzy rozwiązań tą metodą zwrócili uwagę, że zadanie jest prawie identyczne z jednym z zadań z XXIII Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej, a cytowany lemat można znaleźć w opracowaniach zadań z owej olimpiady...

Całkiem odmienne, intrygujące oryginalnością pomysłu rozwiązanie przysłała **Paulina Domagalska**: niech (a_n) będzie ciągiem nierosnącym $(a_0 = 1)$, dla którego szereg $\sum b_n$ o wyrazach $b_n = a_n^2/a_{n+1}$ jest zbieżny; wówczas także szereg $\sum a_n$ jest zbieżny (kryterium porównawcze: $b_n \geq a_n$). Niech $s_n = a_0 + \ldots + a_n$, $w_n = b_0 + \ldots + b_n$; $s_n \to s$, $w_n \to w$. Ustalmy n. Średnia arytmetyczna ważona liczb $c_i = a_{ii+1}$ $(i = 0, \ldots, n)$ branych odpowiednio z wagami $p_i = a_i/s_n$ jest nie mniejsza niż średnia harmoniczna tych liczb (z tymi samymi wagami): $\sum p_i c_i \geq \left(\sum p_i c_i^{-1}\right)^{-1}$. Ta nierówność po prostym przekształceniu przybiera postać:

$$w_n \geq \frac{s_n^2}{s_{n+1} - 1}; \qquad \text{w granicy:} \quad w \geq \frac{s^2}{s-1} \geq 4;$$

ostatnia nierówność ($s^2 \geq 4s - 4$, czyli $(s-2)^2 \geq 0$) jest oczywista. Dla $a_n = 2^{-n}$ mamy $w = 4$, więc $\inf A = 4$. Ładne!

Rozszerzona czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po 241 zadaniach

Przemysław Gadziński	– Środa Śląska	39,32
Zbigniew Galias	– Kraków	36,75
Dariusz Wilk	– Rzeszów	25,57
Jarosław Łazuka	– Warszawa	1- 21,27
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	1- 17,37
Andrzej Idzik	– Bolesławiec	1- 17,05
Artur Gawryszczak	– Dubeczno	1- 16,69
Jacek Konieczny	– Poznań	8,47
Ryszard Zimny	– Żychlin	7,40

Lista obejmuje uczestników, którzy przysłali co najmniej jedno rozwiązanie zadania z roczników 1995–1997 oraz mają w bieżącej rundzie na swoim koncie co najmniej 7 punktów. Jedynka przed kreską wskazuje, że uczestnik zdobył już raz **44** punkty i obecnie wykonuje drugie okrążenie.

Pozostali członkowie **Klubu 44F** (alfabetycznie; liczby w nawiasach oznaczają wielokrotność przekroczenia **44** punktów):
P. Bała (3), A. Borowski (1), A. Gluza (1), P. Gworys (3), W. Kacprzak (1), J. Lipkowski (2), D. Lipniacki (3), B. Mikielewicz (1), L. Motyka (1), R. Musiał (1), P. Perkowski (2), T. Rawlik (1), R. Repucha (1), A. Sikorski (3), J. Stelmach (1), A. Surma (3), L. Szalast (1), P. Wach (1), T. Wietecha (2).

Oto najważniejsze uwagi nasuwające się przy lekturze listów naszych Czytelników:

Zadanie **223.** [Równowaga względem przechyłu różnych pływających brył] (współczynnik trudności WT=3,28, liczba poprawnych rozwiązań LPR=1). Bezbłędne rozwiązanie punktu b (równowaga pionowego walca) podał p. **A. Idzik**. Jak się okazało, do wyniku podanego w *Delcie* 1/1997 wkradła się pomyłka (zamiast prawidłowej liczby 2 pod pierwiastkiem jest 6). W liście innego Czytelnika przeczytałem: „Aby prostopadłościan znajdował się w stanie równowagi trwałej, jego energia potencjalna przy wychyleniu powinna wzrosnąć”. W rzeczywistości wzrosnąć powinna *łączna energia potencjalna bryły i cieczy*; analiza minimum tej łącznej energii była alternatywną wobec „wzorcowej” metodą rozwiązania.

Zadanie **234.** [Po jakim czasie spadnie kuleczka wosku, gdy bryłę metalu ogrzewać z drugiego końca?] (WT=3,57, LPR=0). Fizyczne warunki zadania były niedoprecyzowane, co spowodowało pewne zamieszanie. Jeden z Czytelników przyjął założenie o jednakowej temperaturze metalu i wprowadził dodatkową stałą opisującą przekazywanie ciepła od płomienia do metalu. Takie rozwiązanie mogłoby być poprawne tylko przy niewielkich rozmiarach bryły i jej bardzo dobrym przewodnictwie (zostało ocenione na 0,5). Nieco niższą ocenę (0,3) uzyskało rozwiązanie oparte na dziwacznym założeniu, że ciepło jest przekazywane tylko na grzanie wosku.

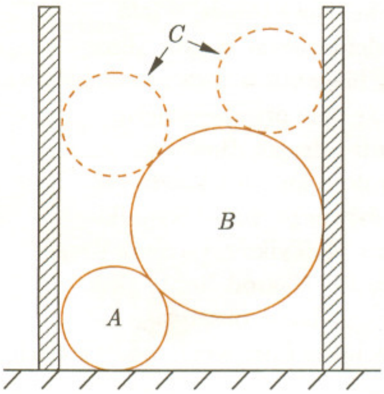
Zadanie **235.** [Krystalizacja w gorącym roztworze cukru na skutek dolania zimnej wody] (WT=1,15, LPR=4). Wyniki liczbowe uzyskane przez pp. **P. Gadzińskiego**, **A. Idzika**, **J. Łazukę** i **A. Nowogrodzkiego** dość znacznie się różnią między sobą, a także od wyniku „wzorcowego”, co należy przypisać trudnościom przy precyzyjnym nakreśleniu na wykresie stycznej lub siecznej, ewentualnie także przesunięciu koloru na stronie naszego czasopisma.

Zadania z fizyki nr 252, 253

Redaguje Jerzy B. BROJAN

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 1998

252. Jednorodny wydrążony walec o wewnętrznym promieniu c i zewnętrznym d stoi na poziomej powierzchni, a do jego środka włożono dwie gładkie kule A i B (rys. 1) o masach m_A i m_B oraz promieniach a i b, przy czym $a < b$, $c < a + b$.
a) Obliczyć minimalną masę walca, przy której się on nie przewróci.
b) Do walca włożono trzecią kulę C, identyczną z A. Biorąc pod uwagę oba możliwe położenia tej kuli (zob. rysunek; zakładamy, że A i C się nie zetkną), obliczyć minimalną masę walca m, przy której się on nie przewróci.



Rys. 1

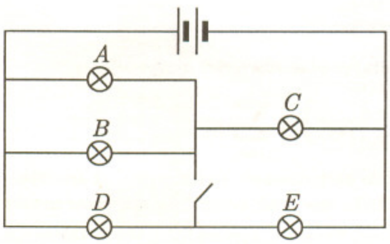
253. Jak wiadomo, dla gazów składających się z cząsteczek jednoatomowych ciepło molowe w stałej objętości C_V jest w przybliżeniu równe $(3/2)R$, natomiast dla gazów dwuatomowych $C_V \approx (5/2)R$. Przybliżenie to nie jest jednak dobre w temperaturach bardzo niskich, gdyż wtedy obroty cząsteczek ulegają „zamrożeniu" i pozostają tylko ruchy wzdłuż trzech osi przestrzennych, co odpowiada $C_V \approx (3/2)R$ (niezależnie od liczby atomów w cząsteczce). Przyjmijmy więc dla uproszczenia, że gaz jest doskonały (ściśle spełnia równanie $pV = nRT$), a wartość C_V wynosi $(3/2)R$ poniżej pewnej nieznanej temperatury T' i $(5/2)R$ powyżej tej temperatury. Stwierdzono, że gdy rozpoczynając od pewnej objętości V_0 i ciśnienia p_0 ogrzano ten gaz izochorycznie zwiększając ciśnienie do $3p_0$, po czym rozprężono adiabatycznie do początkowej wartości ciśnienia, objętość okazała się równa $2V_0$; powracając do punktu początkowego na drodze przemiany izobarycznej zamykamy cykl. Obliczyć sprawność tego cyklu (podać wartość liczbową).

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 10/1997

Przypominamy treść zadań:

244. Źródło dźwięku harmonicznego o stałej częstotliwości f_0 spada pionowo z przyspieszeniem $g = 9,8\ \mathrm{m/s^2}$ i w chwili t_0 mija z prędkością v_0 nieruchomy mikrofon, który o $t = 5$ s wcześniej odebrał dźwięk o częstotliwości $f_1 = 1200$ Hz, a o t później (w chwili „symetrycznej" względem t_0) odebrał dźwięk o częstotliwości $f_2 = 800$ Hz. Obliczyć f_0 i v_0. Prędkość dźwięku w powietrzu jest równa $c = 340$ m/s.

245. W przedstawionym obwodzie (rys. 2) żaróweczki są jednakowe. Jak zareagują (i czy zareagują) na zamknięcie klucza?



Rys. 2

244. Oznaczmy czas lotu źródła dźwięku od wysłania pierwszego sygnału (odebranego przez mikrofon w chwili $t_0 - t$) do minięcia mikrofonu przez t_1, a od minięcia mikrofonu do wysłania drugiego sygnału – przez t_2. W ciągu czasu t_1 źródło obniży się o odcinek h_1, gdzie

$$h_1 = v_0 t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2 = c(t_1 - t)\,.$$

Rozwiązując równanie kwadratowe znajdujemy

$$t_1 = \frac{1}{g}\left(-(c - v_0) + \sqrt{(c - v_0)^2 + 2gct}\right)$$

i analogicznie

$$t_2 = \frac{1}{g}\left(-(c + v_0) + \sqrt{(c + v_0)^2 + 2gct}\right).$$

W chwili wysłania pierwszego sygnału źródło porusza się z prędkością $v_0 - gt_1$, a w chwili wysłania drugiego – z prędkością $v_0 + gt_2$. Ze wzorów na zjawisko Dopplera mamy

$$f_1 = f_0 \frac{c}{c - v_0 + gt_1}, \qquad f_2 = f_0 \frac{c}{c + v_0 + gt_2}\,.$$

Przekształcenia algebraiczne prowadzą do rozwiązania

$$v_0 = c\left(\varphi - \sqrt{\varphi^2 - \tau - 1}\right), \quad \text{gdzie}: \quad \varphi = \frac{f_1^2 + f_2^2}{f_1^2 - f_2^2}, \; \tau = \frac{2gt}{c},$$

$$f_0 = \frac{2 f_1 f_2}{\sqrt{f_1^2 - f_2^2}} \sqrt{\frac{v_0}{c}}\,.$$

Podstawiając dane obliczamy $v_0 = 88{,}7$ m/s, $f_0 = 1096$ Hz.

245. Przed otwarciem klucza przez każdą z żaróweczek A i B płynął prąd mniejszy niż przez C, a zatem i napięcie na nich było mniejsze. Przy danej na rysunku biegunowości źródła napięcia oznacza to, że potencjał górnego bieguna klucza (węzła ABC) był wyższy od potencjału dolnego bieguna (węzła DE). Przez zamknięty klucz prąd popłynie więc w dół, a to z kolei spowoduje – jak wynika z praw Kirchhoffa – przygaśnięcie żaróweczek C i D, a rozjarzenie żaróweczek A, B i E.