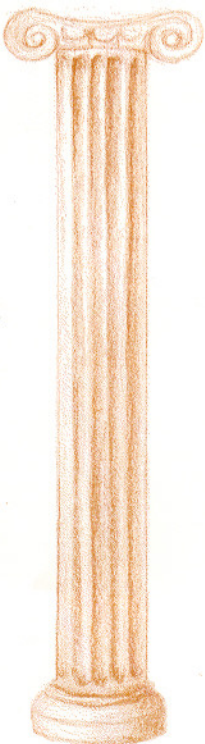
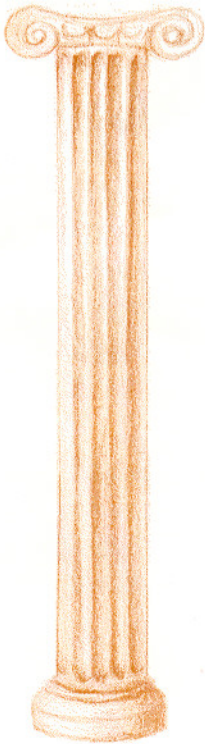


## CYFROMANIA (2)

Rozwiążemy teraz zadanie podane w poprzednim numerze Γ-limatiasu. Rozwiązanie sprowadza się do odpowiedzi na pytanie: Czy liczba 1998-cyfrowa złożona z jedynek i dwójek może dzielić się przez  $2^{1998}$ ?

Okazuje się, że tak, przy czym jest tylko jedna taka liczba! Popatrzymy najpierw na krótsze końcówki o podobnej

... 222211212222122112221122212122121221111111111222111121212121221212  
111212211212212221222121221122222111111212111222122121121112121121222  
22211221211112222211211221111221221222222122112121222111112121122121122  
2121211212211111121222122222212122122222121222122211222111112121211111  
2122112111222222221221212111211221222112221121221121212222212122222122  
212221212122221211212211111111112221112211121222221221121211122122  
1112111222112121112121222121111112212122221221122112222111222221222  
11122222111221222211221212121111112111212211112121111221111122112  
2212221211211222211122111212211222212212122221221111111212222212112121  
2212112212221222221221121222211221112221211222221212221112112211111  
1112111222221211121121221122211212112121112221111122212111121122121  
21112211212122111121121222121221122122221122122221111212111122212  
12122211211121121121121122112211221221221111111111212212221222  
222111121112111221212222111122122211212221211111111112222211222  
1212112222121112112122111122121221112211221122112212222122211212121  
1122221112222221112222211121221112221222221222211221111122112212  
11222212121112221212211221212121221122112211221111111111212111121  
1212222121212121222212211221122221222221222122121211121111121121  
1222111111211222222211222212112211212112221212222211111211212212  
21121121222221212112122222112121221222221121122221121222112112112122  
1221212211121221122121122122122112112111222121111221121212112222  
21222112221121122212212221112121211112122211212122111121121212121  
21122221212221211212222121122221211222211221212212112122222111  
2121221222122112122221221221221221221221221221221221221221221221221  
112112121211122221112122112112222112221212111121212212212121121112  
12121111112121222212211222122122212122122122122122122122122122112111  
2111222221122212211211121212121212112211212121121121221222121222111  
21221112221211221212112121212122111211121112121221121112122112



Tak więc potęgi dwójki, których 1998-cyfrowa końcówka składa się tylko z cyfr 1 i 2, istnieją i jest ich nieskończenie wiele. Przy tym każda z nich ma taką końcówkę jak podana wyżej.

JWR

## MIEDZY NAMI OSZUSTAMI (1')

**Wyjaśnienie oszustwa (1):**  
Niezwykle często pojawiający się błąd polegający na niezrozumieniu istoty indukcji jest następujący: Sprawdziliśmy prawdziwość dowodzonego twierdzenia  $T(n)$  dla  $n = 1$  i udowodniliśmy drugi krok indukcyjny (czyli implikację  $T(n) \Rightarrow T(n + 1)$ ) dla  $n \geq 5$ .

**Pytanie:** Dla jakich  $n$  mamy w tym momencie udowodnione twierdzenie  $T(n)$ ?

**Odpowiedź:** Dla  $n \geq 5$ ? NIE !!! Tylko dla  $n = 1$ !  
Popatrzymy na schemat:

1 2 3 4 5  $\Rightarrow$  6  $\Rightarrow$  7  $\Rightarrow$  8  $\Rightarrow$  9  $\Rightarrow$  10...

Sprawdziliśmy, że zachodzi  $T(1)$  i pokazaliśmy implikację

własności. Końcówka jednocyfrowa podzielna przez  $2^1$  i złożona tylko z jedynek i dwójek to 2. Nie dzieli się ona przez  $2^2$ , ale dopisując na początku cyfrę 1 otrzymujemy końcówkę 2-cyfrową 12 podzielną przez  $2^2$ . 12 dzieli się przez  $2^3$  z resztą  $2^2$ , podobnie jak 100. Zatem 112 podzielne przez  $2^3$  jest żadaną końcówką 3-cyfrową. 112 dzieli się także przez  $2^4$ . Nie chcemy popsuć tej podzielności przez napisanie na początku jedynki, dopisanie dwójki daje właściwą końcówkę 4-cyfrową. I tak dalej...

Jeżeli  $2^k | r_k$  i  $0 < r_k < 10^k$  jest końcówką  $k$ -cyfrową, to  $r_k$  dzieli się przez  $2^{k+1}$  z resztą  $2^k$ , wtedy  $r_{k+1} = 10^k + r_k$  (dopisanie na początku jedynki), lub bez reszty i wtedy  $r_{k+1} = 2 \cdot 10^k + r_k$  (dopisanie na początku dwójki).

Obliczenia wykonane przy użyciu komputera wskazują, że 1998-cyfrowa końcówka jest równa:

$T(5) \Rightarrow T(6), T(6) \Rightarrow T(7), T(7) \Rightarrow T(8), \dots$  Ale z tych implikacji nie będzie żadnego pożytku, dopóki nie stwierdzimy, że  $T(5)$  jest prawdą. W tym przypadku sprawdzenie twierdzenia dla  $n = 5$  spełnia rolę pierwszego kroku indukcyjnego. Bez tego dowód indukcyjny jest bezwartościowy. W naszym zadaniu  $T(n)$  oznacza nierówność

$$(*) \quad 30n < 2^n + 110,$$

która dla  $n = 5$  i  $n = 6$  jest fałszywa. Dla  $n = 7$  mamy  $210 < 128 + 110 = 238$ . Dopiero teraz możemy zaprząć do pracy udowodnione implikacje  $T(7) \Rightarrow T(8), T(8) \Rightarrow T(9), T(9) \Rightarrow T(10), \dots$  i stwierdzić, że nierówność (\*) jest prawdziwa dla wszystkich  $n \geq 7$ , co wykazaliśmy indukcyjnie (a także dla  $n = 1, 2, 3, 4$ , co sprawdziliśmy bezpośrednio w poprzednim numerze Γ-limatiasu).

JWR