2/98 (2)

Γ-limatias $_{n\to\infty}$

CYFROMANIA (2)

Rozwiążemy teraz zadanie podane w poprzednim numerze Γ-limatiasu. Rozwiązanie sprowadza się do odpowiedzi na pytanie: Czy liczba 1998-cyfrowa złożona z jedynek i dwójek może dzielić się przez 2^{1998}?

Okazuje się, że tak, przy czym jest tylko jedna taka liczba! Popatrzmy najpierw na krótsze końcówki o podobnej własności. Końcówka jednocyfrowa podzielna przez 2^1 i złożona tylko z jedynek i dwójek to 2. Nie dzieli się ona przez 2^2, ale dopisując na początku cyfrę 1 otrzymujemy końcówkę 2-cyfrową 12 podzielną przez 2^2. 12 dzieli się przez 2^3 z resztą 2^2, podobnie jak 100. Zatem 112 podzielne przez 2^3 jest żądaną końcówką 3-cyfrową. 112 dzieli się także przez 2^4. Nie chcemy popsuć tej podzielności przez napisanie na początku jedynki, dopisanie dwójki daje właściwą końcówkę 4-cyfrową. I tak dalej...

Jeżeli $2^k | r_k$ i $0 < r_k < 10^k$ jest końcówką k-cyfrową, to r_k dzieli się przez 2^{k+1} z resztą 2^k, wtedy $r_{k+1} = 10^k + r_k$ (dopisanie na początku jedynki), lub bez reszty i wtedy $r_{k+1} = 2 \cdot 10^k + r_k$ (dopisanie na początku dwójki).

Obliczenia wykonane przy użyciu komputera wskazują, że 1998-cyfrowa końcówka jest równa:

....22221121222212211222112221212212121221111111111122211112121211221212
1112122112122122221222121221122222111111212111222122121112111212112122 2
2221122121111222221121122111122122122222212211212122211111212112212112 2
2121211212211111121221122222221212212222212112221222112221111112112111 11
2122112111222222222122121211121122122111221121221112121222221121222221 22
2122212121222212112122111111111111222111221111212222221221121121111221 2
1112111222112121112121222121111111122121212222122112211222211112222212 22
1111222221112212222112212112121111111211121122111112121111221111112211 2
2212222121121112222111221112122112222122121222212211111111212222211211211
2212111221222122222212211212222111221112221211222221211222111211222211111
1112111222221121112112122112221121121121211112221111112221211111211122 11
2111221121121122111112112122212122112212222211221122222111121211111222 12
1212221121111211211121121122112112211122122121221111111111112122122212 22
2221111211121111221212222111112212122112122212111111111111111122222111222
1212111222212111211212221111212122111122111221122121222221222211121121211
1122221111222222211112222211112122111222122222212222111221111112211122 12
1122221212111122212112211122121121212211211221122111111111111121211111 21
1212222212112121222221221122111222221222222122212221212111121111112111 21
1222111111211222222222112222212112211212121122212122222211111121111212212
2112112122222212121121222221112121221222221121122222112122212111211112122
1221212211121221122121122122122112112112111222212111111221121211211122 22
2122211122211211222122122211112121121111211222211211212211112111212121 21
2111222221212221211212222121122221211112222211221121221211211221222211 11
2121221222122112122221221221221221222211122222222222222222222111121122 22
1121121212111222211112122112112222112221212111121212212211212112211111 2
1212111111121212222212211222122122212112211221221112222121221212121121 11
2111222221122221221121111212121211211211221121211211121122122211212221 11
212211112221211221212111212112112211112111211111212122112

Tak więc potęgi dwójki, których 1998-cyfrowa końcówka składa się tylko z cyfr 1 i 2, istnieją i jest ich nieskończenie wiele. Przy tym każda z nich ma taką końcówkę jak podana wyżej.

JWR

MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (1′)

Wyjaśnienie oszustwa (1):
Niezwykle często pojawiający się błąd polegający na niezrozumieniu istoty indukcji jest następujący: Sprawdziliśmy prawdziwość dowodzonego twierdzenia $T(n)$ dla $n = 1$ i udowodniliśmy drugi krok indukcyjny (czyli implikację $T(n) \Rightarrow T(n+1)$) dla $n \geq 5$.

Pytanie: Dla jakich n mamy w tym momencie udowodnione twierdzenie $T(n)$?

Odpowiedź: Dla $n \geq 5$? NIE !!! Tylko dla $n = 1$!
Popatrzmy na schemat:

$\boxed{1}$ 2 3 4 5 ⇒ 6 ⇒ 7 ⇒ 8 ⇒ 9 ⇒ 10...

Sprawdziliśmy, że zachodzi $T(1)$ i pokazaliśmy implikacje $T(5) \Rightarrow T(6)$, $T(6) \Rightarrow T(7)$, $T(7) \Rightarrow T(8)$, ... Ale z tych implikacji nie będzie żadnego pożytku, dopóki nie stwierdzimy, że $T(5)$ jest prawdą. W tym przypadku sprawdzenie twierdzenia dla $n = 5$ spełnia rolę pierwszego kroku indukcyjnego. Bez tego dowód indukcyjny jest bezwartościowy. W naszym zadaniu $T(n)$ oznacza nierówność

$$(*) \qquad 30n < 2^n + 110,$$

która dla $n = 5$ i $n = 6$ jest fałszywa. Dla $n = 7$ mamy $210 < 128 + 110 = 238$. Dopiero teraz możemy zaprząc do pracy udowodnione implikacje $T(7) \Rightarrow T(8)$, $T(8) \Rightarrow T(9)$, $T(9) \Rightarrow T(10)$,... i stwierdzić, że nierówność $(*)$ jest prawdziwa dla wszystkich $n \geq 7$, co wykazaliśmy indukcyjnie (a także dla $n = 1, 2, 3, 4$, co sprawdziliśmy bezpośrednio w poprzednim numerze Γ-limatiasu).

JWR

Korespondencję do Γ-limatiasu prosimy kierować pod adresem:
Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCŁAW; e-mail: jwr@ math.uni.wroc.pl