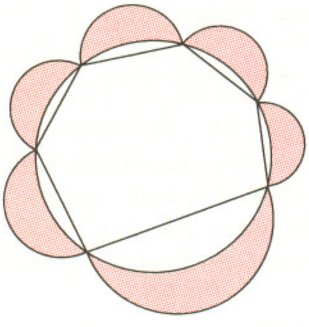
Księżyce Hipokratesa

Witold BEDNAREK



Rys. 1

1. Niech W będzie wielokątem wpisanym w okrąg $o(O, R)$. *Księżycem Hipokratesa wielokąta* W nazwiemy każdą figurę ograniczoną łukiem okręgu $o(O, R)$ i półokręgiem leżącym na zewnątrz wielokąta W, opartym na jednym z boków tego wielokąta (rys. 1).

Uwaga. W naszych rozważaniach założymy dodatkowo, że $O \in W$.

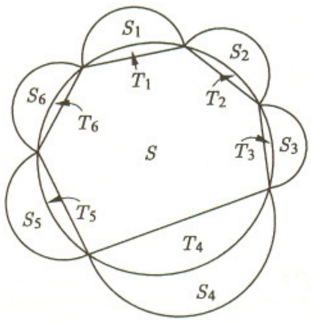
Niech $a_1, a_2, \ldots, a_n$ oznaczają długości boków wielokąta W o polu S; $S_1, S_2, \ldots, S_n$ – pola księżyców Hipokratesa; $T_1, T_2, \ldots, T_n$ – pola odcinków koła $k(O, R)$ wyznaczonych przez boki wielokąta W (rys. 2). Mamy wówczas

$$S_k + T_k = \frac{\pi}{2}\left(\frac{a_k}{2}\right)^2 \quad \text{dla } k = 1, 2, \ldots, n$$

oraz $S + (T_1 + T_2 + \cdots + T_n) = \pi R^2$. Z tych równości wynika, że $(S_1 + S_2 + \cdots + S_n) - S = \frac{\pi}{8}(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 - 8R^2)$. Wobec tego suma pól księżyców Hipokratesa wielokąta W jest równa jego polu wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = 8R^2. \tag{1}$$

W tym artykule zajmiemy się poszukiwaniem wielokątów, których pole jest równe sumie pól ich księżyców.



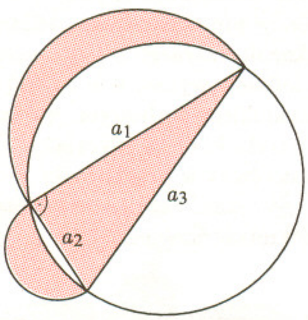
Rys. 2

2. Hipokrates odkrył, że suma pól księżyców trójkąta prostokątnego jest równa jego polu (rys. 3). Istotnie, wobec twierdzenia Pitagorasa mamy

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 2a_3^2 = 8\left(\frac{a_3}{2}\right)^2,$$

a $R = a_3/2$ jest długością promienia okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym o przeciwprostokątnej a_3. (Zauważmy, że księżyc oparty na przeciwprostokątnej degeneruje się do łuku.)

Postawmy pytanie: czy istnieje trójkąt nieprostokątny, którego pole jest równe sumie pól jego księżyców?



Rys. 3

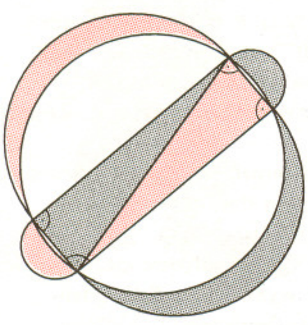
Załóżmy, że zachodzi warunek (1), tzn. $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 8R^2$. Jak wiadomo, $4R = a_1a_2a_3/S$ oraz (wzór Herona) $S = \sqrt{p(p-a_1)(p-a_2)(p-a_3)}$, gdzie p oznacza połowę obwodu trójkąta. Z tych trzech równości natychmiast wynika, że

$$2(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)p(p-a_1)(p-a_2)(p-a_3) = a_1^2a_2^2a_3^2.$$

Po przekształceniach otrzymujemy stąd

$$(a_1^2 - a_2^2 + a_3^2)(a_1^2 - a_2^2 - a_3^2)(a_1^2 + a_2^2 - a_3^2) = 0.$$

Powyższa równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy kwadrat długości pewnego boku trójkąta jest sumą kwadratów długości pozostałych boków. Oznacza to, że warunek (1) nie zachodzi dla żadnego trójkąta nieprostokątnego.



Rys. 4

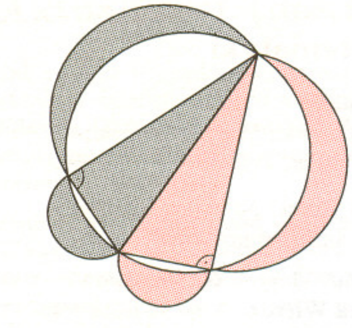
3. Poszukajmy teraz czworokątów spełniających warunek (1). Oczywiście, spełniają go czworokąty złożone z dwóch trójkątów prostokątnych wpisanych w okrąg – w szczególności prostokąty oraz deltoidy o kątach prostych między bokami różnej długości (rys. 4 i 5).

Rozważmy inny przypadek szczególny – trapez równoramienny. Przy oznaczeniach z rysunku 6 mamy

$$x^2 + \left(\frac{a_1}{2}\right)^2 = R^2, \quad y^2 + \left(\frac{a_2}{2}\right)^2 = R^2, \quad (x+y)^2 + \left(\frac{a_1 - a_2}{2}\right)^2 = a_3^2.$$

Po wyrugowaniu z tych równań x i y otrzymujemy

$$R^2 = \frac{a_3^2(a_3^2 + a_1a_2)}{4a_3^2 - (a_1 - a_2)^2}.$$

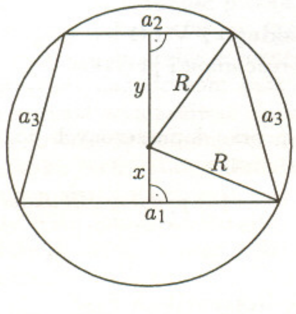

Rys. 5

Uwzględniając dodatkowo warunek (1) równości pól trapezu i jego księżyców, otrzymamy po przekształceniach

$$(a_1 - a_2)^2(2a_3^2 - (a_1^2 + a_2^2)) = 0\,.$$

Warunek ten jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = a_2$ (trapez jest wówczas prostokątem) lub gdy $a_3 = \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2}{2}}$ (długość ramienia trapezu jest średnią kwadratową długości podstaw – ten warunek jest spełniony np. dla trapezu równoramiennego o bokach 7, 1, 5, 5).

4. Wiemy już, że pole trójkąta równobocznego nie jest równe, a pole kwadratu jest równe sumie pól odpowiednich księżyców Hipokratesa. Okazuje się, że nie istnieją inne wielokąty foremne, których pola byłyby równe sumie pól księżyców Hipokratesa. Oto dowód.



Rys. 6

Długość boku n-kąta foremnego oznaczmy przez a. Zakładamy, że $n > 4$. Mamy (patrz rys. 7) $a = 2R\sin\frac{\pi}{n}$, a więc warunek (1) przybiera postać

$$8R^2 = n \cdot a^2 = 4nR^2 \sin^2 \frac{\pi}{n}\,.$$

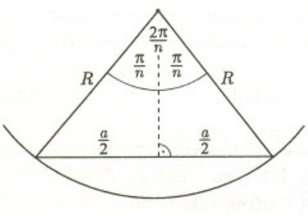
Stąd otrzymujemy $\sin\pi/n = \sqrt{2/n}$. Z drugiej strony, dla dodatnich α zachodzi nierówność $\sin\alpha < \alpha$, a zatem byłoby $\sin\pi/n = \sqrt{2/n} < \pi/n$, co prowadzi do konkluzji $n < \pi^2/2 < 5$, sprzecznej z założeniem $n > 4$.

5. Na koniec udowodnimy, że dla każdego $n > 4$ można w okrąg wpisać n-kąt, którego pole jest równe sumie pól jego księżyców Hipokratesa. Rozważmy w tym celu okrąg o środku O i promieniu R oraz punkty $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tego okręgu, które wyznaczają kąty wpisane $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ (patrz rys. 8). Korzystając z twierdzenia cosinusów dla trójkątów A_1OA_2, A_2OA_3, ..., A_nOA_1, możemy warunek (1) przepisać w postaci

$$(2R^2 - 2R^2\cos\alpha_1) + (2R^2 - 2R^2\cos\alpha_2) + \cdots + (2R^2 - 2R^2\cos\alpha_n) = 8R^2$$

lub równoważnie

$$\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \cdots + \cos\alpha_n = n - 4\,. \tag{2}$$



Rys. 7

Aby rozwiązać nasz problem, należy podać liczby dodatnie $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, nie większe niż π, spełniające równość (2) oraz równość

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 2\pi\,. \tag{3}$$

Przyjmijmy $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{n-3} = \alpha/(n-3)$, $\alpha_{n-2} = \frac{5}{6}\pi - \alpha$, $\alpha_{n-1} = \frac{\pi}{2}$, $\alpha_n = \frac{2}{3}\pi$. Równość (3) jest wówczas spełniona. Należy jeszcze wykazać, że istnieje liczba $\alpha \in (0, \frac{5}{6}\pi)$, dla której spełniona jest równość (2), czyli

$$(n-3)\cos\frac{\alpha}{n-3} + \cos\left(\frac{5}{6}\pi - \alpha\right) = n - 3\tfrac{1}{2}\,.$$

Rozważmy funkcję $f(x)$ określoną wzorem

$$f(x) = (n-3)\cos\frac{x}{n-3} + \cos\left(\frac{5}{6}\pi - x\right).$$

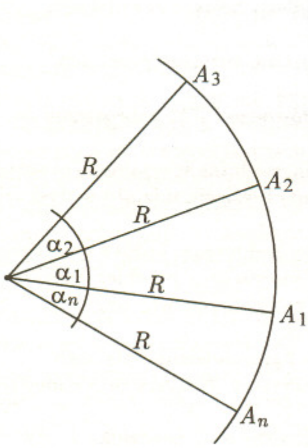
Obliczmy $f(\frac{\pi}{6})$ i $f(\frac{\pi}{3})$. Mamy

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = (n-3)\cos\frac{\pi}{6(n-3)} + \cos\frac{2}{3}\pi < (n-3) + \cos\frac{2}{3}\pi = n - 3\tfrac{1}{2}\,.$$

Z drugiej strony, z nierówności $\cos\alpha > 1 - \alpha^2/2$, dla $\alpha > 0$, wynika, że

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = (n-3)\cos\frac{\pi}{3(n-3)} > (n-3)\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3(n-3)}\right)^2\right) =$$

$$= n - 3 - \frac{\pi^2}{18(n-3)}\,.$$



Rys. 8

Ponieważ $n \geq 5$, więc prawa strona powyższej nierówności jest, jak łatwo sprawdzić, większa od $n - 3\frac{1}{2}$. Funkcja f jest ciągła, a więc ma własność Darboux: istnieje $\alpha \in (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3})$, takie, że $f(\alpha) = n - 3\frac{1}{2}$. To spostrzeżenie kończy dowód.