Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 III 1998

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1997.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadania 241 (WT=2,20)
z numeru 6/1997

Przemysław Gadziński	– Środa Śl.	39,32
Jarosław Łazuka	– Warszawa	21,27
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	17,37
Andrzej Idzik	– Bolesławiec	17,05

Zadania z fizyki nr 250, 251

Redaguje Jerzy B. BROJAN

250. Długopis pozostawia ślad na podłożu wtedy, gdy kąt jego odchylenia od prostopadłej do podłoża nie przekracza wartości α. Jeśli początkowy kierunek długopisu jest zmienną przypadkową, to jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wirujący długopis spadając na stół pozostawi na nim ślad? Uwzględniamy tylko pierwsze uderzenie o stół. Środek masy długopisu leży w połowie jego długości i porusza się pionowo z prędkością v_1 (przyspieszenie grawitacyjne należy pominąć), a prędkość obiegowa końca długopisu wokół środka jest równa v_2, przy czym płaszczyzna tego ruchu jest pionowa. Liczbową wartość prawdopodobieństwa podać dla $v_1 = 2$ m/s, $v_2 = 3$ m/s i trzech wartości α: 40°, 60°, 85°.

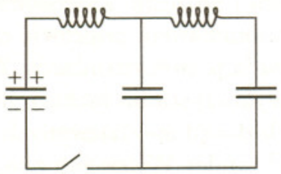
251. W miejscowości A występuje w danej chwili całkowite zaćmienie Słońca, miejscowość B leży na granicy obszaru zaćmienia częściowego, a miejscowość C leży w połowie odległości między A i B. Ile wynosi w przybliżeniu stosunek natężeń oświetlenia powierzchni Ziemi I_C/I_B?

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 9/1997

Przypominamy treść zadań:

242. Prawidłowa regulacja układu kierowniczego w samochodzie wymaga, aby kąt skręcenia przednich kół był niejednakowy. Wyjaśnić przyczynę tej różnicy. Jeśli w dobrze wyregulowanym samochodzie przy skręceniu prawego przedniego koła w prawo o 20° lewe przednie koło skręca w prawo o 18°, to o jaki kąt skręca lewe koło przy skręceniu prawego w prawo o 40°?

243. Trzy jednakowe kondensatory i dwie jednakowe cewki połączono w obwód przedstawiony na rysunku 1. Początkowo lewy kondensator był naładowany do napięcia U, pozostałe dwa były nienaładowane, a prąd w żadnej części obwodu nie płynął. W jakich granicach będzie się zmieniać napięcie na każdym z kondensatorów po zamknięciu klucza? Opór obwodu pominąć.

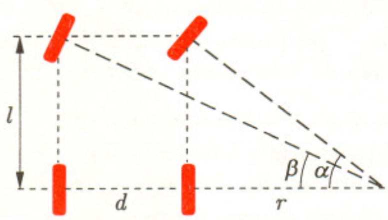


Rys. 1

242. Oznaczmy odległość przedniej osi od tylnej przez l, rozstaw kół przez d, kąt skręcenia wewnętrznego przedniego koła przez α, a zewnętrznego przez β (rys. 2). Z równań

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{r}{l}, \qquad \operatorname{ctg}\beta = \frac{r+d}{l}$$

wynika tożsamość $\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha = d/l = \text{const}$, czyli $\operatorname{ctg}\beta_1 - \operatorname{ctg}\alpha_1 = \operatorname{ctg}\beta_2 - \operatorname{ctg}\alpha_2$. Podstawiając $\alpha_1 = 20°$, $\beta_1 = 18°$, $\alpha_2 = 40°$ obliczamy $\beta_2 \approx 33°$.



Rys. 2

243. Drgania elektromagnetyczne w obwodzie są złożeniem poniższych dwóch drgań prostych (harmonicznych):
1. Prąd płynie przez cewki i boczne kondensatory, omijając środkowy kondensator. Ponieważ dwie cewki połączone szeregowo mają indukcyjność zastępczą $2L$, a dwa kondensatory – pojemność zastępczą $C/2$, więc częstość tych drgań jest równa $\omega_1 = 1/\sqrt{LC}$.
2. Przez boczne kondensatory płynie jednakowy prąd (w danej chwili np. ze zwrotem w górę), a przez środkowy – o dwukrotnie większej wartości i przeciwnym zwrocie (np. w dół). Aby znaleźć częstość tych drgań, można zastąpić środkowy kondensator dwoma o pojemności po $C/2$ połączonymi równolegle – wtedy obwód rozpada się na dwa „oczka", z których każde zawiera szeregowo połączone kondensatory C i $C/2$ oraz cewkę L. Obliczamy $\omega_2 = 1/\sqrt{LC_{\text{zast}}} = \sqrt{3/LC}$.

Szczegółowa analiza warunków początkowych prowadzi do następujących wzorów na napięcia na poszczególnych kondensatorach:

$$U_{\text{lewy}} = \frac{U}{2}\cos(\omega_1 t) + \frac{U}{6}\cos(\omega_2 t) + \frac{U}{3},$$

$$U_{\text{śr}} = \frac{U}{3}(1 - \cos(\omega_2 t)),$$

$$U_{\text{prawy}} = -\frac{U}{2}\cos(\omega_1 t) + \frac{U}{6}\cos(\omega_2 t) + \frac{U}{3}.$$

Ponieważ częstości ω_1 i ω_2 są niewspółmierne, więc można wybrać chwilę t, w której wartości obu cosinusów są dowolnie bliskie -1 lub pierwszy jest bliski $+1$, a drugi -1, lub na odwrót. Dlatego napięcia na bocznych kondensatorach zmieniają się w zakresie od $(-1/3)U$ do U, a na środkowym – od 0 do $(2/3)U$. Dodatni zwrot napięć przyjęliśmy jako zgodny z napięciem początkowym (plus na górze).

Zadania z matematyki nr 353, 354

Redaguje Marcin E. KUCZMA

353. Dowieść, że każdą liczbę całkowitą dodatnią da się przedstawić w postaci sumy pewnej liczby składników całkowitych dodatnich nie mających dzielników pierwszych różnych od 2 i 3, przy czym żaden z tych składników nie dzieli się przez żaden inny składnik.

354. Udowodnić nierówność

$$\operatorname{tg}(\sin\theta) < \frac{2\sin\theta}{1+\cos^2\theta} \qquad \text{dla} \quad \theta \in (0,\pi).$$

Zadanie 354 zaproponował pan Józef Banaś z Rzeszowa.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 341 (WT=1,63) i 342 (WT=2,94)
z numeru 5/1997

Witold Bednorz	– Tychy	42,85
Tomasz Rawlik	– Braunschweig	42,27
Przemysław Gadziński	– Środa Śl.	41,38
Maciej Mostowski	– Warszawa	37,53
Konrad Patkowski	– Gdańsk	36,27

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 9/1997

Przypominamy treść zadań:

345. Liczby rzeczywiste a, b, c spełniają równanie $\dfrac{1}{bc-a^2}+\dfrac{1}{ca-b^2}+\dfrac{1}{ab-c^2}=0.$ Dowieść, że $\dfrac{a}{(bc-a^2)^2}+\dfrac{b}{(ca-b^2)^2}+\dfrac{c}{(ab-c^2)^2}=0.$

346. Rozważamy zdanie:

(∗) Każdy wielościan wypukły, który nie zawiera żadnego czworościanu o objętości 1, jest zawarty w pewnym czworościanie o objętości mniejszej niż V.

(a) Dowieść, że dla $V=27$ zdanie (∗) jest prawdziwe.

(b) Czy zdanie (∗) jest prawdziwe dla jakiejkolwiek liczby V mniejszej od 27?

345. Przyjmijmy oznaczenie:

$$P_{jk}(a,b,c)=\frac{a^j}{(bc-a^2)^k}+\frac{b^j}{(ca-b^2)^k}+\frac{c^j}{(ab-c^2)^k}$$

dla $j,k\in\{0,1,2\}$ oraz dla dowolnej trójki liczb a, b, c, dla której mianowniki są różne od zera. Należy wykazać, że jeżeli $P_{01}(a,b,c)=0$, to $P_{12}(a,b,c)=0$. To zaś wynika z nietrudnej do sprawdzenia tożsamości $P_{01}\cdot P_{11}=P_{12}$.

346. (a) Niech W będzie wielościanem spełniającym przesłankę zdania (∗) dla $V=27$ i niech A, B, C, D będą czterema jego wierzchołkami wyznaczającymi czworościan $ABCD$ o maksymalnej objętości. Oznaczmy przez A', B', C', D' obrazy punktów A, B, C, D w jednokładności j o skali -3 względem środka ciężkości czworościanu $ABCD$. Każdy wierzchołek tego czworościanu jest obrazem środka ciężkości przeciwległej ściany.

Objętość czworościanu $ABCD$ jest mniejsza niż 1, więc objętość czworościanu $A'B'C'D'$ jest mniejsza niż 27. Wykażemy, że czworościan $A'B'C'D'$ zawiera wszystkie wierzchołki wielościanu W – i w konsekwencji zawiera cały ten wielościan, a więc spełniona jest konkluzja zdania (∗).

Przypuśćmy, że pewien wierzchołek P leży poza czworościanem $A'B'C'D'$ – leży więc po zewnętrznej stronie płaszczyzny którejś z jego ścian – na przykład $A'B'C'$. Ale płaszczyzna $A'B'C'$, będąca obrazem płaszczyzny ABC w jednokładności j, przechodzi przez punkt D. Zatem odległość punktu P od płaszczyzny ABC jest większa niż odległość punktu D od tej płaszczyzny, i wobec tego objętość czworościanu $ABCP$ jest większa od objętości czworościanu $ABCD$, wbrew jego wyborowi. Sprzeczność kończy dowód.

(b) Przypuśćmy, że zdanie (∗) jest prawdziwe dla pewnej liczby dodatniej V. Niech R będzie promieniem kuli K_R opisanej na czworościanie foremnym T_R o objętości 1. Weźmy kulę K_r o dowolnym promieniu $r<R$, współśrodkową z K_R. Istnieje wielościan wypukły W zawarty we wnętrzu kuli K_R i zawierający kulę K_r. Każdy czworościan zawarty w wielościanie W ma objętość mniejszą niż czworościan T_R (największy czworościan wpisany w kulę K_R), czyli mniejszą niż 1. To znaczy, że dla wielościanu W spełniona jest przesłanka zdania (∗). Wielościan W jest wobec tego zawarty w pewnym czworościanie T o objętości mniejszej niż V.

Najmniejszym czworościanem zawierającym kulę K_r jest opisany na niej czworościan foremny $\widetilde{T}_r$; jego objętość jest 27 razy większa od objętości czworościanu foremnego T_r wpisanego w kulę K_r, równej $(r/R)^3$. Tak więc

$$V > \operatorname{vol}(T) \geq \operatorname{vol}(\widetilde{T}_r) = 27\operatorname{vol}(T_r) = 27(r/R)^3.$$

Ponieważ liczba r mogła być dowolnie bliska R, wynika stąd, że $V\geq 27$. Zatem odpowiedź na pytanie (b) brzmi: *nie*.

Rozwiązanie zadania M 833.

Tezy dowodzimy przez indukcję (przypadek $n=1$ Czytelnik rozpatrzy samodzielnie). Oto krok indukcyjny. Niech $f\colon\{-1,1\}^{n+1}\to\mathbf{R}$; funkcje $g,h\colon\{-1,1\}^n\to\mathbf{R}$ zdefiniujmy wzorami

$$g(x_1,\ldots,x_n)=f(x_1,\ldots,x_n,-1), \qquad h(x_1,\ldots,x_n)=f(x_1,\ldots,x_n,1).$$

Na mocy założenia indukcyjnego istnieją liczby rzeczywiste $(a'_A)_{A\subset\{1,2,\ldots,n\}}$ i $(a''_A)_{A\subset\{1,2,\ldots,n\}}$, takie, że

$$g=\sum_{A\subset\{1,2,\ldots,n\}} a'_A w_A, \qquad h=\sum_{A\subset\{1,2,\ldots,n\}} a''_A w_A.$$

Ponieważ dla $A\subset\{1,2,\ldots,n\}$ oraz liczb $x_i=\pm1$ mamy

$$w_{A\cup\{n+1\}}(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1})=\begin{cases} w_A(x_1,\ldots,x_n) & \text{dla } x_{n+1}=1,\\ -w_A(x_1,\ldots,x_n) & \text{dla } x_{n+1}=-1,\end{cases}$$

więc żądanym przedstawieniem jest

$$f=\sum_{A\subset\{1,2,\ldots,n\}}\frac{a'_A+a''_A}{2}w_A+\sum_{A\subset\{1,2,\ldots,n\}}\frac{a''_A-a'_A}{2}w_{A\cup\{n+1\}}.$$