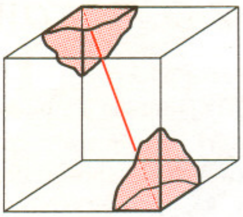
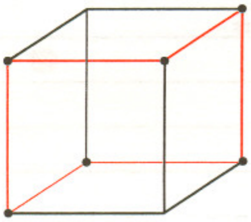
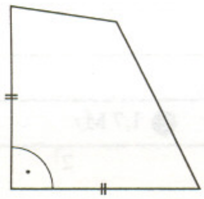
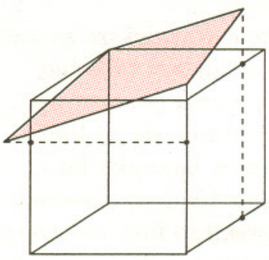
Inne spojrzenie

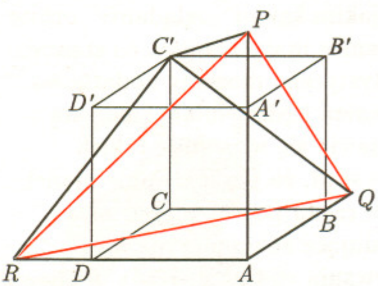

Rys. 1

Oś obrotowa bryły to taka prosta, że bryła po obrocie wokół niej o pewien kąt (różny od 0°, 360° itd.) nałoży się na siebie. W przypadku rozpatrywanych sześcianów kątem takim może być np. 120°.

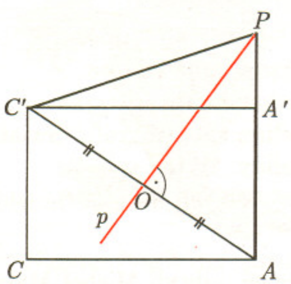

Rys. 2


Rys. 3


Rys. 4



Rys. 5



Rys. 6

Chodzi mianowicie o inne spojrzenie na sześcian. Można go zobaczyć jako przecięcie dwóch naroży trójściennych, z których każde składa się z samych kątów prostych (rys. 1). Nie zawsze z przecięcia takich naroży powstaje sześcian – aby powstał, naroża powinny mieć wspólną oś obrotową, być ustawione wierzchołkami na zewnątrz i krawędzie każdego z tych naroży powinny trafiać w dwusieczne kątów płaskich drugiego.

Taka mnogość warunków od razu sugeruje pytania, co by było, gdyby któryś z nich zastąpić innym. Można np. zadać pytanie, co za bryłę otrzymamy z przecięcia naroży, gdy obrócimy jedno z nich wokół osi obrotowej o jakiś kąt, i jaką ta bryła będzie miała objętość.

Zadanie jest dość trudne. Nie rozwiążemy go tutaj do końca, a tylko rozdłubiemy ten problem.

Uwaga pierwsza. Nie warto interesować się wszystkimi kątami – zauważmy, że sytuacja powtarza się co 120°, a nawet i w przedziale kątów $\langle 0,\ 120^\circ\rangle$ sytuacja lustrzanie powtarza się dla kątów α i $120^\circ - \alpha$ (dlaczego?).

Uwaga druga. Z każdą krawędzią dzieje się podczas takiego przecinania to samo, podobnie z każdą ścianą każdego naroża – dlaczego?

Uwaga trzecia. Bryła otrzymana z przecięcia naroży powstaje tak: każdą krawędź jednego naroża przecinamy z jakąś ścianą drugiego naroża otrzymując w ogólności 6 punktów. Punkty te łączymy łamaną, na ogół nie płaską (rysunek 2 pokazuje to w przypadku sześcianu).

Uwaga czwarta. Odcinki krawędzi w przypadku sześcianu (czyli 0°) są najkrótsze. Bierze się to stąd, że wtedy łączą one wierzchołek naroża z jego rzutem prostokątnym na płaszczyzny ścian naroża, a to – jak wiadomo – jest najkrótszy odcinek łączący punkt z płaszczyzną.

Uwaga piąta. Każda ze ścian otrzymanej bryły jest (gdy pominiemy obrót o kąt 60°) czworokątem mającym jeden kąt prosty, boki z niego wychodzące równe i przeciwległy kąt rozwarty (jak na rysunku 3) – dlaczego ? Pewną wskazówką może być rysunek 4, gdzie zasugerowana jest konstrukcja jednej takiej ściany.

Pozostawiamy dokończenie rozwiązywania problemu Czytelnikom obiecując za ciekawe rozwiązania **nagrody książkowe i publikację**. Sami zaś rozwiążemy zadanie w pominiętym przypadku 60° zakładając, iż długość krawędzi sześcianu jest 1.

Zauważmy, że przy obrocie jednego naroża o kąt 60° krawędzie obu naroży spotkają się. Zamiast sześcioodcinkowej łamanej będzie trójodcinkowa, czyli trójkąt, a ten zawsze jest płaski.

Otrzymana bryła będzie więc sumą dwóch czworościanów o trzech krawędziach wychodzących z jednego wierzchołka, równych i prostopadłych (rys. 5). Objętość bryły będzie zatem równa jednej trzeciej sześcianu długości tej krawędzi – prawda ? Pozostaje więc obliczenie tej długości.

Kolejne spostrzeżenie jest takie: płaszczyzna trójkąta, który powstał z sześcioodcinkowej łamanej, to płaszczyzna p – symetralna odcinka łączącego wierzchołki naroży, dane zadania są bowiem wobec niej (z dokładnością do obrotu) symetryczne.

Skoro tak, to narysujmy przekrój zarówno wyjściowego sześcianu, jak i otrzymanej bryły płaszczyzną zawierającą oś obrotową naroży i prostopadłą do płaszczyzny p (rys. 6). Mamy (z podobieństwa $\Delta AA'C'$ i ΔAOP)

$$\frac{AC'}{AA'} = \frac{AP}{AO}, \quad \text{czyli} \quad AP = \frac{AC' \cdot AO}{AA'}, \quad \text{czyli} \quad AP = \sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{3}{2}.$$

Objętość bryły jest zatem równa $\frac{9}{8}$.

M. K.