1/98 (1)

Γ limatias $_{n\to\infty}$

CYFROMANIA (1)

Jako punkt wyjścia naszych rozważań weźmiemy następujące

ZADANIE: Czy istnieje potęga dwójki, której 1998-cyfrowa końcówka składa się tylko z jedynek i dwójek?

Aby odpowiedzieć na to pytanie, trzeba zrozumieć, jakie reszty z dzielenia przez $10^{1998} = 2^{1998} \cdot 5^{1998}$ dają potęgi dwójki. Reszty z dzielenia potęg dwójki przez 2^{1998} znamy dość dobrze – są one równe zeru, jeśli tylko wykładnik jest nie mniejszy niż 1998.

Cała zabawa polega na zrozumieniu ciągu r_n reszt z dzielenia 2^n przez 5^{1998}, lub ogólniej, ciągu $r_{k,n}$ reszt z dzielenia a^n przez 5^k, przy ustalonym k i przy $a > 1$ niepodzielnym przez 5.

Zacznijmy od $k = 1$. Ponieważ a^4 dzieli się przez 5 z resztą 1, ciąg $r_{1,n}$ reszt z dzielenia a^n przez 5 jest okresowy z okresem 4, jednak nie musi to być okres najmniejszy. Wtedy reszty $r_{1,n}$ powtarzają się co czwarta, ale może co druga, a może są wszystkie równe. W zależności od reszty z dzielenia a przez 5 możliwe są następujące ciągi reszt $r_{1,n}$:

$$1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,\ldots$$
$$2,4,3,1,2,4,3,1,2,4,3,1,2,4,3,1,2,4,3,1,2,4,3,1,\ldots$$
$$3,4,2,1,3,4,2,1,3,4,2,1,3,4,2,1,3,4,2,1,3,4,2,1,\ldots$$
$$4,1,4,1,4,1,4,1,4,1,4,1,4,1,4,1,4,1,4,1,4,1,4,1,\ldots$$

Najmniejszy okres ciągu reszt oznaczmy przez O_1. Oznacza to, że liczby $r_{1,1}, r_{1,2}, \ldots, r_{1,O_1} = 1$ są parami różne.

Dla $k = 2$ ciąg reszt $r_{2,n}$ z dzielenia a^n przez 5^2 ma okres $5 \cdot O_1$, gdyż z $a^{O_1} \equiv 1 \pmod 5$ wynika $a^{5O_1} \equiv 1 \pmod{5^2}$. Najmniejszy okres O_2 może być równy $5O_1$, ale może też być równy O_1, jeśli $a^{O_1} \equiv 1 \pmod{5^2}$.

Dla większych k jest podobnie. Trzeba uwzględnić fakt, że jeżeli dla pewnego $k \ge 1$ zachodzi $5^k \| b-1$ (tzn. $b-1$ dzieli się przez 5^k, ale przez 5^{k+1} już nie), to $5^{k+1} \| b^5 - 1$. Istotnie, z podzielności $5^k \| b-1$ wynika, że b jest postaci $5^k c + 1$, gdzie c nie dzieli się przez 5. Wtedy

$$b^5 - 1 = (5^k c + 1)^5 - 1 =$$
$$= 5^{k+1} c + 2 \cdot 5^{2k+1} c^2 + 2 \cdot 5^{3k+1} c^3 + 5^{4k+1} c^4 + 5^{5k} c^5.$$

Wszystkie składniki tej sumy dzielą się przez 5^{k+1}, natomiast przez 5^{k+2} dzielą się ostatnie cztery, a pierwszy nie.

Jeśli przez O_k oznaczymy najmniejszy okres ciągu reszt $r_{k,n}$ z dzielenia a^n przez 5^k, to O_1 jest jedną z liczb 1, 2, 4. Jeśli przy tym $5^l \| a^{O_1} - 1$, to $O_1 = O_2 = \ldots = O_l$ oraz $O_{k+1} = 5O_k$ dla $k \ge l$. Na pewno O_k jest dzielnikiem liczby $4 \cdot 5^{k-1}$.

W przypadku $a = 2$ mamy $O_1 = 4$. Przy tym $5 \| 2^4 - 1$. Zatem $O_k = 4 \cdot 5^{k-1}$. Ciąg reszt $r_n = r_{1998,n}$ z dzielenia 2^n przez 5^{1998} ma okres długości $4 \cdot 5^{1997}$ i okres ten składa się z reszt parami różnych i niepodzielnych przez 5. Ponieważ reszt z dzielenia przez 5^{1998}, które są względnie pierwsze z 5^{1998}, jest właśnie $4 \cdot 5^{1997}$, każda z tych reszt występuje w ciągu r_n.

Potęga dwójki o dużym wykładniku musi dzielić się przez 2^{1998}, ale przy dzieleniu przez 5^{1998} może dawać dowolną resztę niepodzielną przez 5. Stąd otrzymujemy następującą charakteryzację:

WNIOSEK: Liczba $0 < r < 10^{1998}$ może być 1998-cyfrową końcówką potęgi dwójki o wykładniku nie mniejszym niż 1998 wtedy i tylko wtedy, gdy r nie dzieli się przez 5 oraz $2^{1998} | r$. Jeśli przy tym w jest najmniejszym wykładnikiem, dla którego 2^w ma końcówkę r, to pozostałe wykładniki o tej własności są postaci

$$w + 4 \cdot 5^{1997} \cdot s, \qquad \text{gdzie } s = 1, 2, 3, 4, \ldots$$

Uwaga: Liczbę r uważamy za 1998-cyfrową uzupełniając ją w razie potrzeby zerami początkowymi.

W następnym numerze Γ-limatiasu użyjemy powyższej charakteryzacji do rozwiązania podanego na początku zadania.

JWR

MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (1)

ZADANIE: Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$(*) \qquad 30n < 2^n + 110.$$

Rozwiązanie: Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla $n = 1$ sprawdzamy bezpośrednio $30 < 2 + 110 = 112$.

2° Załóżmy, że $30n < 2^n + 110$. Udowodnimy nierówność $30(n+1) < 2^{n+1} + 110$.

Stosując założenie indukcyjne otrzymujemy ciąg nierówności:

$$30(n+1) = 30n + 30 < 2^n + 110 + 30 =$$
$$= 2^{n+1} + 110 + 30 - 2^n < 2^{n+1} + 110,$$

przy czym ostatnia nierówność zachodzi dla $n \ge 5$.

Zatem nierówność $(*)$ została udowodniona dla $n \ge 5$.

Pozostaje sprawdzić, że

dla $n = 2$ mamy $60 < 4 + 110 = 114$,
dla $n = 3$ mamy $90 < 8 + 110 = 118$,
dla $n = 4$ mamy $120 < 16 + 110 = 126$.

Tym samym nierówność $(*)$ jest udowodniona dla wszystkich liczb naturalnych n.
W szczególności wykazaliśmy, że dla $n = 6$ zachodzi nierówność $180 < 174$.

Dla tych, którzy czują się oszukani – wyjaśnienie za miesiąc.

JWR

Korespondencję do Γ-limatiasu prosimy kierować pod adresem:
Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCŁAW; e-mail: jwr@ math.uni.wroc.pl