Jacek JAKUBOWSKI, Rafał SZTENCEL

Doświadczenie, polegające na wielokrotnym rzucaniu monetą (symetryczną lub nie) ma tę zaletę, że każdy ma jakieś wyobrażenia dotyczące wyników. Nietrudno na przykład uwierzyć, że stosunek liczby orłów S_n do liczby rzutów n nie będzie się wiele różnił od p – prawdopodobieństwa otrzymania orła w pojedynczym rzucie.

I rzeczywiście, jest to prawo wielkich liczb udowodnione przez Jacoba Bernoulliego pod koniec XVII w. Dokładniej, dla każdego $\varepsilon > 0$ mamy

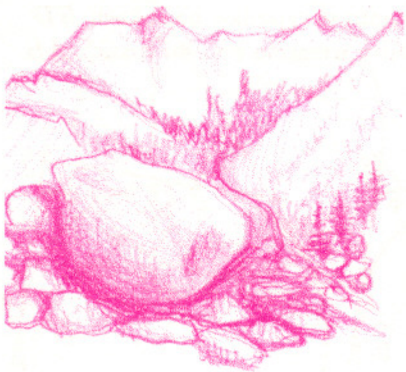
$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) = 1\,.$$

Oznacza to, że im większe n, tym (na ogół) mniejsza szansa dużego odchylenia $\frac{S_n}{n}$ od p. Nie znaczy to jednak, że ciąg liczb $\frac{S_n(\omega)}{n}$ zmierza do p dla prawie wszystkich zdarzeń elementarnych ω (czyli że $\frac{S_n}{n}$ dąży do p z prawdopodobieństwem 1). Gwarantuje to dopiero poniższe – mocniejsze – twierdzenie: dla każdego $\varepsilon > 0$ mamy

$$\lim_{m\to\infty} P\left(p-\varepsilon \le \frac{S_n}{n} \le p+\varepsilon \quad \text{dla wszystkich } n \ge m\right) = 1\,.$$

Dla dowodu oszacujemy prawdopodobieństwo zdarzenia $A_n = \left\{\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \le \varepsilon\right\}$. Niech $q = 1-p$. Zdarzenie A_n przedstawimy w postaci sumy zdarzeń $\{S_n = k\}$ dla odpowiednio dobranych k. Pamiętając, że $P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$, otrzymamy wtedy

$$\begin{aligned}
P\left(\frac{S_n}{n} \ge p+\varepsilon\right) &\le \sum_{k\ge n(p+\varepsilon)} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \le \\
&\le \sum_{k\ge n(p+\varepsilon)} \mathrm{e}^{-\lambda((p+\varepsilon)n-k)} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \le \\
&\le \mathrm{e}^{-\lambda n\varepsilon} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(p\mathrm{e}^{\lambda q}\right)^k \left(q\mathrm{e}^{-\lambda p}\right)^{n-k} = \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda n\varepsilon} \left(p\mathrm{e}^{\lambda q} + q\mathrm{e}^{-\lambda p}\right)^n \le \\
&\le \mathrm{e}^{-\lambda n\varepsilon} \left(p\mathrm{e}^{\lambda^2 q^2} + q\mathrm{e}^{\lambda^2 p^2}\right)^n \le \mathrm{e}^{-\lambda n\varepsilon} \left(p\mathrm{e}^{\lambda^2} + q\mathrm{e}^{\lambda^2}\right)^n \le \\
&\le \mathrm{e}^{-\lambda n\varepsilon} \cdot \mathrm{e}^{\lambda^2 n}.
\end{aligned}$$



W trzeciej od końca nierówności skorzystaliśmy z faktu, że $\mathrm{e}^x \le 1 + x \le \mathrm{e}^{x^2} + x$. Wybieramy teraz λ minimalizujące prawą stronę, czyli $\lambda = \frac{\varepsilon}{2}$ i otrzymujemy nierówność Bernsteina:

$$P\left(\frac{S_n}{n} \ge p+\varepsilon\right) \le \mathrm{e}^{-n\frac{\varepsilon^2}{4}} \quad \text{dla } \varepsilon > 0\,.$$

Analogicznie $P\left(\frac{S_n}{n} \le p-\varepsilon\right) \le \mathrm{e}^{-n\frac{\varepsilon^2}{4}}$.

Ponieważ dopełnienie iloczynu zbiorów jest sumą dopełnień (wzory de Morgana), więc

$$P\left(\bigcap_{n=m}^{\infty} A_n\right) = 1 - P\left(\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n^c\right)$$

(A^c oznacza tu zdarzenie przeciwne do A). Ponadto,

$$P\left(\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n^c\right) \le \sum_{n=m}^{\infty} P\left(A_n^c\right) \le 2\sum_{n=m}^{\infty} \mathrm{e}^{-n\frac{\varepsilon^2}{4}} \to 0, \text{ gdy } m\to\infty\,.$$

Stąd otrzymujemy żądany wynik.

Z powyższych rozważań wynika, że zmienna losowa $\frac{S_n - np}{n}$ jest dla dużych n silnie skupiona wokół zera. A jeśli będziemy rozpatrywać $\frac{S_n-np}{\sqrt{n}}$? O zachowaniu się tego wyrażenia mówi twierdzenie de Moivre'a–Laplace'a (de Moivre, 1733;

Rozwiązanie zadania M 831.
Jeśli S oznacza pole trójkąta, $2p$ – jego obwód, r – promień okręgu wpisanego, zaś a, b i c – długości boków, to wówczas

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

(wzór Herona), a ponadto $S = rp$. Z tych wzorów wynika, że

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

Podstawiając wartości podane w treści zadania przekonujemy się łatwo, że dla każdego z trójkątów promień koła wpisanego jest równy 6.

Rozwiązanie zadania M 830.
Skoro $n^2 + 1997n = (n+k)^2$ dla pewnego naturalnego k, to $1997n = 2nk + k^2$. Stąd $k \leq 998$, a wtedy
$$1997n \leq 2 \cdot 998n + 998^2,$$
czyli $n \leq 998^2$.
Z drugiej strony
$$(998^2)^2 + 1997 \cdot (998^2) = (998^2)^2 + 2 \cdot 998 \cdot (998^2) + 998^2 = (998^2 + 998)^2.$$
Szukaną liczbą jest więc 998.

Laplace udowodnił to twierdzenie później, nie powołując się na poprzednika):
$$P\left(a < \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} < b\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x\,,$$
gdy $n \to \infty$. Innymi słowy, $\frac{S_n - np}{\sqrt{n}}$ ma asymptotycznie rozkład normalny (gaussowski).

Załóżmy teraz, że moneta jest symetryczna, czyli $p = \frac{1}{2}$. Czy różnica między liczbą orłów i reszek będzie ograniczona? Posługując się, na przykład, twierdzeniem de Moivre'a–Laplace'a można udowodnić, że z prawdopodobieństwem 1 tak nie będzie. Mało tego, wartość bezwzględna różnicy jest w pewnym sensie rzędu $\sqrt{n \log\log n}$, a dokładniej, jeśli R_n oznacza liczbę reszek, to
$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n - R_n}{\sqrt{2n \log\log n}} = 1$$
z prawdopodobieństwem 1. Oczywiście ze względu na symetrię
$$\liminf_{n\to\infty} \frac{S_n - R_n}{\sqrt{2n \log\log n}} = -1\,.$$
Jest to tzw. prawo iterowanego logarytmu (Chinczyn, 1924).

Wobec tego $S_n - R_n$ będzie powracać do zera nieskończenie wiele razy z prawdopodobieństwem 1. Jednak średni czas oczekiwania na powrót do zera jest nieskończony.

I na zakończenie dość paradoksalny wynik: jeśli rzucamy symetryczną monetą n razy i zapisujemy kolejne wartości $S_k - R_k$ dla $k = 1, 2, \ldots, n$, czyli przewagę orłów nad reszkami, to okazuje się, że jest mała szansa na to, by dodatnie i ujemne różnice pojawiły się z grubsza tyle samo razy. Przeciwnie, typowy wynik to taki, że orły (lub reszki) prowadzą przez większość czasu. Można wyliczyć asymptotyczny rozkład dla czasu prowadzenia (prawo arcusa sinusa, P. Lévy, 1939): niech T_n oznacza czas, przez jaki prowadzi orzeł w serii n rzutów. Wtedy
$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{T_n}{n} < t\right) = \int_0^t \frac{1}{\pi\sqrt{t(1-t)}}\,\mathrm{d}t = \frac{2 \arcsin \sqrt{t}}{\pi}\,.$$
Teraz widać drugą niewątpliwą zaletę doświadczenia polegającego na rzutach monetą: umożliwia ono dokonanie przeglądu podstawowych twierdzeń rachunku prawdopodobieństwa.

Grudzień

Przez cały grudzień zbliżamy się jeszcze do Słońca, co nie przeszkadza, że robi się coraz zimniej. Bowiem o warunkach klimatycznych decyduje nie odległość Ziemi od Słońca, zmniejszająca się zresztą w bardzo małych granicach, lecz nasłonecznienie, a to określone jest przez porę roku, czyli położenie Słońca na ekliptyce (por. *Patrz w niebo,* str. 17). Na południowej półkuli Ziemi jest „odwrotnie", tzn. kończy się wiosna i zbliża się lato. Święta Bożego Narodzenia są jednak na całym świecie jednocześnie, dlatego np. Australijczycy będą – jak zwykle – chodzić z małymi choinkami na plażę. I tylko Święty Mikołaj będzie miał kłopoty z podróżowaniem na saniach.

Zima zaczyna się (u nas) 21 XII o godz. 21:07, Słońce wstępuje wtedy w znak Koziorożca. Dni będą się już wydłużać, ale mrozy zapewne jeszcze przed nami, gdyż Słońce musi wznieść się zdecydowanie wyżej, by móc ogrzać wyziębiony grunt. W Koziorożcu lub w jego pobliżu znajdują się w grudniu trzy planety: Wenus, Mars i Jowisz, dość wcześnie więc zachodzą po zachodzie Słońca, przy czym Wenus w połowie miesiąca osiąga maksimum jasności. Saturn w Rybach widoczny jest w pierwszej połowie nocy. Pełnia Księżyca wypada 14 XII. Księżyc bardzo zbliży się do Saturna 9 XII i do Aldebarana 13 XII, ale oba te zbliżenia dla nas wypadają w ciągu dnia.

T.K.