Rozwiązanie zadania M 830.
Skoro $n^2 + 1997n = (n+k)^2$ dla pewnego naturalnego k, to $1997n = 2nk + k^2$. Stąd $k \leq 998$, a wtedy
$$1997n \leq 2 \cdot 998n + 998^2,$$
czyli $n \leq 998^2$.
Z drugiej strony
$$(998^2)^2 + 1997 \cdot (998^2) =$$
$$= (998^2)^2 + 2 \cdot 998 \cdot (998^2) + 998^2 =$$
$$= (998^2 + 998)^2.$$
Szukaną liczbą jest więc 998.

Laplace udowodnił to twierdzenie później, nie powołując się na poprzednika):
$$P\left(a < \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} < b\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \, \mathrm{d}x,$$
gdy $n \to \infty$. Innymi słowy, $\frac{S_n - np}{\sqrt{n}}$ ma asymptotycznie rozkład normalny (gaussowski).

Załóżmy teraz, że moneta jest symetryczna, czyli $p = \frac{1}{2}$. Czy różnica między liczbą orłów i reszek będzie ograniczona? Posługując się, na przykład, twierdzeniem de Moivre'a–Laplace'a można udowodnić, że z prawdopodobieństwem 1 tak nie będzie. Mało tego, wartość bezwzględna różnicy jest w pewnym sensie rzędu $\sqrt{n \log\log n}$, a dokładniej, jeśli R_n oznacza liczbę reszek, to
$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n - R_n}{\sqrt{2n \log\log n}} = 1$$
z prawdopodobieństwem 1. Oczywiście ze względu na symetrię
$$\liminf_{n\to\infty} \frac{S_n - R_n}{\sqrt{2n \log\log n}} = -1.$$
Jest to tzw. prawo iterowanego logarytmu (Chinczyn, 1924).

Wobec tego $S_n - R_n$ będzie powracać do zera nieskończenie wiele razy z prawdopodobieństwem 1. Jednak średni czas oczekiwania na powrót do zera jest nieskończony.

I na zakończenie dość paradoksalny wynik: jeśli rzucamy symetryczną monetą n razy i zapisujemy kolejne wartości $S_k - R_k$ dla $k = 1, 2, \ldots, n$, czyli przewagę orłów nad reszkami, to okazuje się, że jest mała szansa na to, by dodatnie i ujemne różnice pojawiły się z grubsza tyle samo razy. Przeciwnie, typowy wynik to taki, że orły (lub reszki) prowadzą przez większość czasu. Można wyliczyć asymptotyczny rozkład dla czasu prowadzenia (prawo arcusa sinusa, P. Lévy, 1939): niech T_n oznacza czas, przez jaki prowadzi orzeł w serii n rzutów. Wtedy
$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{T_n}{n} < t\right) = \int_0^t \frac{1}{\pi\sqrt{t(1-t)}} \mathrm{d}t = \frac{2 \arcsin\sqrt{t}}{\pi}.$$
Teraz widać drugą niewątpliwą zaletę doświadczenia polegającego na rzutach monetą: umożliwia ono dokonanie przeglądu podstawowych twierdzeń rachunku prawdopodobieństwa.

Grudzień

Przez cały grudzień zbliżamy się jeszcze do Słońca, co nie przeszkadza, że robi się coraz zimniej. Bowiem o warunkach klimatycznych decyduje nie odległość Ziemi od Słońca, zmniejszająca się zresztą w bardzo małych granicach, lecz nasłonecznienie, a to określone jest przez porę roku, czyli położenie Słońca na ekliptyce (por. *Patrz w niebo,* str. 17). Na południowej półkuli Ziemi jest „odwrotnie", tzn. kończy się wiosna i zbliża się lato. Święta Bożego Narodzenia są jednak na całym świecie jednocześnie, dlatego np. Australijczycy będą – jak zwykle – chodzić z małymi choinkami na plażę. I tylko Święty Mikołaj będzie miał kłopoty z podróżowaniem na saniach.

Zima zaczyna się (u nas) 21 XII o godz. 21:07, Słońce wstępuje wtedy w znak Koziorożca. Dni będą się już wydłużać, ale mrozy zapewne jeszcze przed nami, gdyż Słońce musi wznieść się zdecydowanie wyżej, by móc ogrzać wyziębiony grunt. W Koziorożcu lub w jego pobliżu znajdują się w grudniu trzy planety: Wenus, Mars i Jowisz, dość wcześnie więc zachodzą po zachodzie Słońca, przy czym Wenus w połowie miesiąca osiąga maksimum jasności. Saturn w Rybach widoczny jest w pierwszej połowie nocy. Pełnia Księżyca wypada 14 XII. Księżyc bardzo zbliży się do Saturna 9 XII i do Aldebarana 13 XII, ale oba te zbliżenia dla nas wypadają w ciągu dnia.

T.K.