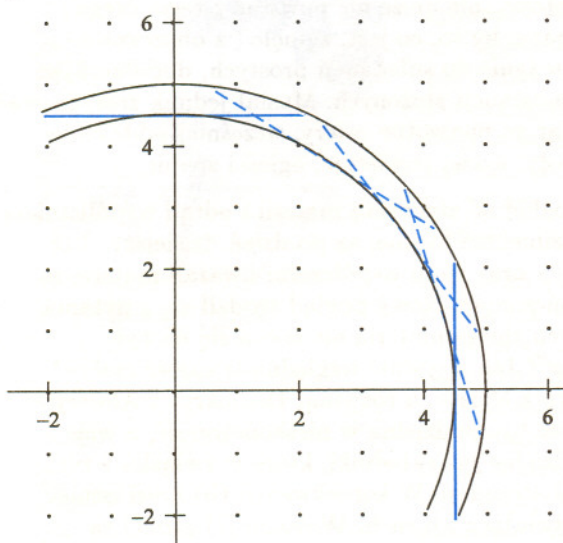


Rys. 1



Rys. 2

Następujące pytanie zostało postawione autorowi przez Jacka Świątkowskiego w czasie wieczornego spaceru po wsi Mysłów (woj. jeleniogórskie).

ZADANIE 7: Na płaszczyźnie dany jest pionowy odcinek długości 1995 nie zawierający żadnych punktów kratowych (tj. punktów o obu współrzędnych całkowitych). Czy można tak poruszać tym odcinkiem, aby w żadnym momencie nie zawierał on punktów kratowych, a po zakończeniu ruchu był położony poziomo?

Rozwiązanie:

Skorzystamy z wyniku poprzedniego zadania. Niech n będzie takie, że liczby

$$n, n+1, n+2, \dots, n+1\,000\,000$$

nie są sumami dwóch kwadratów. Rozważmy okręgi o środku w początku

układu współrzędnych i o promieniach $r = \sqrt{n}$

i $R = \sqrt{n+1\,000\,000}$. Z własności liczby n wynika, że na żadnym z tych okręgów ani w pierścieniu między nimi nie ma punktów kratowych (na rys. 1 zaznaczono okręgi o promieniach $\sqrt{20}$ i $\sqrt{25}$ – na tych okręgach są, co prawda, punkty kratowe, ale między nimi nie ma). Z twierdzenia Pitagorasa łatwo wyliczamy, że między okręgami można umieścić odcinek długości $2\sqrt{R^2 - r^2} = 2000$ (na rys. 1 zaznaczono odcinek długości $4 < 2\sqrt{5}$).

Obrót wokół początku układu współrzędnych jest żądanym ruchem. Po wykonaniu obrotu o 90° odcinek stanie się poziomy, a po drodze nie napotka punktów kratowych, gdyż ruch odbywa się w pierścieniowym obszarze, w którym takich punktów nie ma (rys. 2).

ZADANIE 8, dla Czytelników: Dowieść, że równanie $x^{2005} + y^{2006} + z^{2007} = t^{2010}$ ma rozwiązanie w liczbach naturalnych x, y, z, t .



Zadania

Redaguje Krzysztof OLESZKIEWICZ

M 826. Figura przestrzenna K ma tę własność, że jej część wspólna z każdą płaszczyzną jest kołem otwartym (bez brzegu) albo zbiorem pustym. Udowodnić, iż K jest kulą otwartą albo zbiorem pustym.

Rozwiązanie na str. 17

M 827. Inwersja j względem sfery o środku O i promieniu r to takie przekształcenie przestrzeni bez punktu O w przestrzeń bez punktu O , że dla dowolnego punktu $X \in \mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$ zachodzi równość $OX \cdot OY = r^2$ i punkt $Y = j(X)$ leży na półprostej OX^- . Udowodnić, że w tej inwersji obrazem sfery nie przechodzącej przez punkt O będzie sfera.

Rozwiązanie na str. 11

M 828. Udowodnić, że w tej inwersji obrazem okręgu nie przechodzącego przez punkt O (patrz zadanie M 827) będzie okrąg.

Rozwiązanie na str. 10

(Zadań M 827 i M 828 nauczył mnie pan Jerzy Bednarczuk.)

Redaguje Jarosław KULPA

F 463. Równia pochyła o kącie nachylenia $\alpha = 30^\circ$ i masie $M = 2$ kg znajduje się na wadze. Na równi znajduje się ciało o masie $m = 1$ kg, które ześlizguje się bez tarcia. Obliczyć, jakie będzie wskazanie wagi.

Rozwiązanie na str. 12

F 464. Powszechnie wiadomo, że dioda przewodzi w jedną stronę, a nie przewodzi w drugą. Jeżeli do diody w kierunku przewodzenia przyłożymy napięcie $U = 0,2$ V, to będzie płynął przez nią prąd I . Oszacować, ile razy mniejszy prąd będzie płynął w kierunku zaporowym, gdy odwrócimy napięcie.

Rozwiązanie na str. 16

