# Twierdzenie chińskie o resztach, czyli ciężarówką po lesie

*Jarosław WRÓBLEWSKI*

$A|B$ oznacza, że $A$ dzieli $B$. W związku z tym napis $q_k|r-r_k$ należy czytać: „$q_k$ jest dzielnikiem liczby $(r-r_k)$".

Twierdzenie chińskie o resztach mówi, że dla dowolnych liczb całkowitych $r_1, r_2, ..., r_n$ i naturalnych $q_1, q_2, ..., q_n$ (zero nie jest u nas liczbą naturalną) znajdzie się takie $r$, że $q_1|r-r_1$, $q_2|r-r_2, \ldots, q_n|r-r_n$, o ile dla dowolnych $1 \le i < j \le n$ zachodzi podzielność $NWD(q_i, q_j)|r_i - r_j$. Ostatni warunek jest spełniony na przykład wtedy, gdy liczby $q_1, q_2, \ldots, q_n$ są parami względnie pierwsze, gdyż wówczas $NWD(q_i, q_j) = 1$ dla $i \ne j$. Innymi słowy, możemy zawsze znaleźć liczbę $r$, która spełnia ustalone przez nas postulaty typu: „niech $r$ dzieli się przez $q_i$ z resztą $r_i$", jeśli tylko między tymi postulatami nie ma oczywistej sprzeczności. Nie sposób bowiem żądać, aby liczba dzieliła się przez 6 z resztą 2 i jednocześnie przez 10 z resztą 3, bo to oznaczałoby, że na pytanie, czy liczba ma być parzysta, odpowiadamy, że jesteśmy za, a nawet przeciw.

Z twierdzenia tego wynika na przykład, że nawet bardzo długą (byle wąską) ciężarówką można w wysokopiennym lesie zakręcić o 90° – cierpliwy Czytelnik zobaczy, dlaczego.

ZADANIE **1**: Dowieść, że dla dowolnych liczb naturalnych parami względnie pierwszych $p, q, r$ równanie $x^p + y^q = z^r$ ma rozwiązanie w liczbach naturalnych $x, y, z$.

*Rozwiązanie:*
Wyjdziemy od równości $2^n + 2^n = 2^{n+1}$ i postaramy się dopasować ją do danego równania. W tym celu zażyczymy sobie, aby $p|n$, $q|n$, $r|n+1$. Ponieważ $p, q, r$ są parami względnie pierwsze, znajdzie się takie $n$, które jednocześnie spełnia te trzy życzenia.
Wtedy $(2^{n/p})^p + (2^{n/q})^q = (2^{(n+1)/r})^r$ i wystarczy przyjąć $x = 2^{n/p}$, $y = 2^{n/q}$ i $z = 2^{(n+1)/r}$, gdzie wszystkie występujące wykładniki są całkowite.

ZADANIE **2**: Dowieść, że równanie

$$x^{1994} + y^{1995} + z^{1996} = t^{1998} \tag{1}$$

ma rozwiązanie w liczbach naturalnych $x, y, z, t$.

*Rozwiązanie:*
Zadanie można byłoby rozwiązać podobnie jak poprzednie, ale przeszkadza nam fakt, że wykładniki nie są parami względnie pierwsze. Rozłożymy je więc na czynniki tak, aby zobaczyć wyraźnie wspólne dzielniki:

$$x^{2\cdot 997} + y^{3\cdot 665} + z^{2\cdot 998} = t^{6\cdot 333}. \tag{1'}$$

Każde rozwiązanie równania (1') będzie dawało nam rozwiązanie równania

$$X^2 + Y^3 + Z^2 = T^6. \tag{2}$$

Wnikliwy Czytelnik zauważy, że znalezienie rozwiązania równania (2) stanowi największą trudność na drodze do rozwiązania równania (1).

Autor nie zna lepszej recepty na rozwiązanie równania (2) niż usiłowanie rozłożenia małych szóstych potęg na sumę dwóch kwadratów i sześcianu metodą prób i błędów. Szybko czeka nas miła niespodzianka, bo oto $1 + 27 + 36 = 64$, czyli $1^2 + 3^3 + 6^2 = 2^6$. Ostatnią równość pomnożymy przez $2^p \cdot 3^q$, gdzie $p$ i $q$ dobrane zostaną tak, aby otrzymać rozwiązanie równania (1). Otrzymujemy

$$2^p \cdot 3^q + 2^p \cdot 3^{q+3} + 2^{p+2} \cdot 3^{q+2} = 2^{p+6} \cdot 3^q.$$

Chcąc otrzymać rozwiązanie równania (1), zażyczymy sobie, aby $1994|p$, $1994|q$, $1995|p$, $1995|q+3$, $1996|p+2$, $1996|q+2$, $1998|p+6$ i $1998|q$.

Życzenia te nie są sprzeczne, gdy chodzi o reszty z dzielenia $p$ i $q$ przez 2 i 3, mogą być więc zrealizowane.

ZADANIE **3**: Dowieść, że istnieją takie ciągi $(a_n)$ i $(b_n)$ liczb naturalnych, że liczby $a_n + b_m$, gdzie $m, n \in \mathbb{N}$, są parami względnie pierwsze.


*Rozwiązanie:*
Mamy wykazać, że można zbudować taką nieskończoną tabelę dodawania, aby występujące w niej sumy były parami względnie pierwsze. Wypełnienie tabeli $2 \times 2$ nie nastręcza trudności. Wystarczy przyjąć np. $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $b_1 = 2$ i $b_2 = 10$. Pokażemy, że jeżeli dla pewnych $k \geq 2$, $l \geq 2$ udało nam się dobrać odpowiednie $a_n$ i $b_m$ ($n = 1, 2, 3, ..., k$ oraz $m = 1, 2, 3, ..., l$), czyli wypełnić tabelę dodawania $k \times l$ sumami względnie pierwszymi, to można dołączyć do niej $(k+1)$-szy wiersz (lub analogicznie $(l+1)$-szą kolumnę). Stosując niżej podaną procedurę można będzie wypełnić nieskończoną tabelę dodawania.

Niech więc $a_1, a_2, a_3, ..., a_k$ i $b_1, b_2, b_3, ..., b_l$ będą wybrane tak, aby liczby $a_n + b_m$, dla $1 \leq n \leq k$ i $1 \leq m \leq l$, były parami względnie pierwsze. Niech $p_1, p_2, p_3, ..., p_r$ będą wszystkimi liczbami pierwszymi, które pojawiają się jako dzielniki pierwsze sum wpisanych w tabeli $k \times l$. Chcemy wybrać $a_{k+1}$ tak, aby żadna z liczb $a_{k+1} + b_m$, dla $1 \leq m \leq l$, nie dzieliła się przez żadną z liczb $p_1, p_2, p_3, ..., p_r$. Zapewni to, że dopisane sumy będą względnie pierwsze z już wpisanymi.

Jak zapewnić, aby liczby $a_{k+1} + b_m$, dla $1 \leq m \leq l$, nie dzieliły się przez $p_1$? Otóż liczba $p_1$ jest dzielnikiem pierwszym pewnej sumy wpisanej w tabeli, ale tylko jednej. Skoro wypełnione są co najmniej dwa wiersze, to pewien wiersz (np. o numerze $m_1$) zawiera sumy niepodzielne przez $p_1$. Zażądamy, aby $p_1 | a_{k+1} - a_{m_1}$ i podobnie $p_i | a_{k+1} - a_{m_i}$ $(i = 2, 3, \ldots, r)$, gdzie $p_i$ nie dzieli liczb $a_{m_i} + b_m$, dla $1 \leq m \leq l$.

Trzeba też zapewnić sobie, żeby liczby $a_{k+1} + b_m$, dla $1 \leq m \leq l$, były parami względnie pierwsze. Niech $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_s$ będą wszystkimi dzielnikami pierwszymi liczb $b_{n_1} - b_{n_0}$, dla $1 \leq n_0 < n_1 \leq l$, które nie występują wśród liczb $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_r$. Zażądamy, aby $q_j | a_{k+1} - a_1$, dla $1 \leq j \leq s$. Wtedy żadna z sum w dopisanym wierszu nie będzie dzieliła się przez żadną z liczb $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_s$, co zapewni, że sumy te będą parami względnie pierwsze.

ZADANIE **4**: Dowieść, że istnieje 1997 kolejnych liczb naturalnych, z których każda ma co najmniej 1997 dzielników pierwszych.

*Rozwiązanie:*
Niech $n$ będzie najmniejszą z szukanych liczb. Chcąc zapewnić, by $n$ miało dużo dzielników pierwszych, zażądamy, aby $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_{1997} | n$, gdzie $p_k$ jest $k$-tą liczbą pierwszą. Podobnie warunek $p_{1998} \cdot p_{1999} \cdot p_{2000} \cdot \ldots \cdot p_{3994} | n+1$ zapewnia, że $n+1$ ma co najmniej 1997 dzielników pierwszych i podobnie dla $k \leq 1996$ żądamy, aby $p_{1997k+1} \cdot p_{1997k+2} \cdot p_{1997k+3} \cdot \ldots \cdot p_{1997k+1997} | n+k$.

ZADANIE **5**: Dowieść, że istnieje 1997 kolejnych liczb naturalnych, z których każda dzieli się przez kwadrat liczby naturalnej.

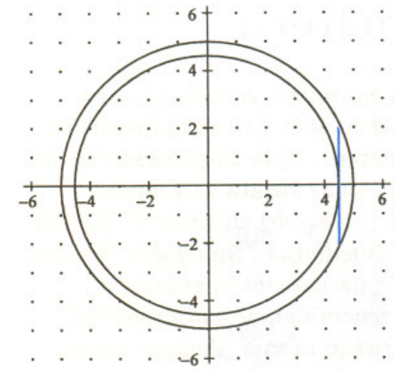
*Rozwiązanie:*
Rozumując jak w poprzednim zadaniu wystarczy zażądać, aby $4 | n$, $9 | n+1$, $25 | n+2, \ldots, p_k^2 | n+k-1, \ldots, p_{1997}^2 | n+1996$.

ZADANIE **6**: Dowieść, że istnieje 1 000 001 kolejnych liczb naturalnych, z których żadna nie jest sumą dwóch kwadratów liczb całkowitych.

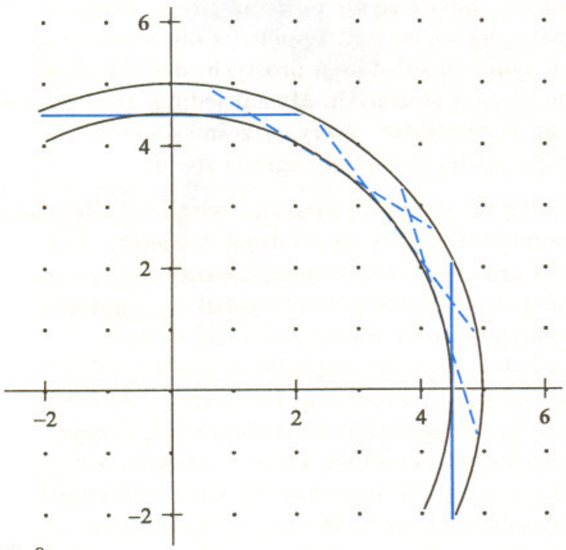
*Rozwiązanie:*
Skorzystamy z charakteryzacji liczb będących sumami dwóch kwadratów. Otóż liczba naturalna jest sumą dwóch kwadratów liczb całkowitych wtedy i tylko wtedy, gdy w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby pierwsze postaci $4k+3$ występują tylko w parzystych potęgach. Tak naprawdę wystarczy wiedzieć, że jeżeli $q = 4k+3$ jest liczbą pierwszą, to liczba podzielna przez $q$, ale niepodzielna przez $q^2$, nie jest sumą dwóch kwadratów. Niech $q_1 = 3$, $q_2 = 7$, $q_3 = 11$, $q_4 = 19, \ldots, q_{1\,000\,000} = 32\,445\,143$, $q_{1\,000\,001} = 32\,445\,191$ będą liczbami pierwszymi dającymi przy dzieleniu przez 4 resztę 3.
Zażądamy, aby

$$n + k - 1 \equiv q_k (\operatorname{mod} q_k^2),$$

dla $k = 1, 2, 3, \ldots, 1\,000\,001$. Spełnienie takiego układu kongruencji zapewnia, że liczby $n, n+1, n+2, ..., n+1\,000\,000$ nie są sumami dwóch kwadratów.



Rys. 1



Rys. 2

Następujące pytanie zostało postawione autorowi przez Jacka Świątkowskiego w czasie wieczornego spaceru po wsi Mysłów (woj. jeleniogórskie).

ZADANIE **7**: Na płaszczyźnie dany jest pionowy odcinek długości 1995 nie zawierający żadnych punktów kratowych (tj. punktów o obu współrzędnych całkowitych). Czy można tak poruszać tym odcinkiem, aby w żadnym momencie nie zawierał on punktów kratowych, a po zakończeniu ruchu był położony poziomo?

*Rozwiązanie:*
Skorzystamy z wyniku poprzedniego zadania. Niech $n$ będzie takie, że liczby

$$n, \quad n+1, \quad n+2, \quad \ldots, \quad n+1\,000\,000$$

nie są sumami dwóch kwadratów. Rozważmy okręgi o środku w początku układu współrzędnych i o promieniach $r=\sqrt{n}$ i $R=\sqrt{n+1\,000\,000}$. Z własności liczby $n$ wynika, że na żadnym z tych okręgów ani w pierścieniu między nimi nie ma punktów kratowych (na rys. 1 zaznaczono okręgi o promieniach $\sqrt{20}$ i $\sqrt{25}$ – na tych okręgach są, co prawda, punkty kratowe, ale między nimi nie ma). Z twierdzenia Pitagorasa łatwo wyliczamy, że między okręgami można umieścić odcinek długości $2\sqrt{R^2-r^2}=2000$ (na rys. 1 zaznaczono odcinek długości $4<2\sqrt{5}$).
Obrót wokół początku układu współrzędnych jest żądanym ruchem. Po wykonaniu obrotu o 90° odcinek stanie się poziomy, a po drodze nie napotka punktów kratowych, gdyż ruch odbywa się w pierścieniowym obszarze, w którym takowych punktów nie ma (rys. 2).

ZADANIE **8**, dla Czytelników: Dowieść, że równanie $x^{2005}+y^{2006}+z^{2007}=t^{2010}$ ma rozwiązanie w liczbach naturalnych $x, y, z, t$.

# Zadania

*Redaguje Krzysztof OLESZKIEWICZ*

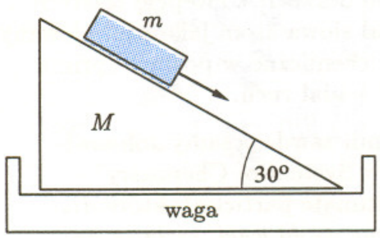
**M 826.** Figura przestrzenna $K$ ma tę własność, że jej część wspólna z każdą płaszczyzną jest kołem otwartym (bez brzegu) albo zbiorem pustym. Udowodnić, iż $K$ jest kulą otwartą albo zbiorem pustym.
Rozwiązanie na str. 17

**M 827.** Inwersja $j$ względem sfery o środku $O$ i promieniu $r$ to takie przekształcenie przestrzeni bez punktu $O$ w przestrzeń bez punktu $O$, że dla dowolnego punktu $X\in\mathbf{R}^3\setminus\{O\}$ zachodzi równość $OX\cdot OY=r^2$ i punkt $Y=j(X)$ leży na półprostej $OX^{\rightarrow}$. Udowodnić, że w tej inwersji obrazem sfery nie przechodzącej przez punkt $O$ będzie sfera.
Rozwiązanie na str. 11

**M 828.** Udowodnić, że w tej inwersji obrazem okręgu nie przechodzącego przez punkt $O$ (patrz zadanie **M 827**) będzie okrąg.
Rozwiązanie na str. 10

(Zadań **M 827** i **M 828** nauczył mnie pan Jerzy Bednarczuk.)

*Redaguje Jarosław KULPA*




**F 463.** Równia pochyła o kącie nachylenia $\alpha=30°$ i masie $M=2$ kg znajduje się na wadze. Na równi znajduje się ciało o masie $m=1$ kg, które ześlizguje się bez tarcia. Obliczyć, jakie będzie wskazanie wagi.
Rozwiązanie na str. 12

**F 464.** Powszechnie wiadomo, że dioda przewodzi w jedną stronę, a nie przewodzi w drugą. Jeżeli do diody w kierunku przewodzenia przyłożymy napięcie $U=0{,}2$ V, to będzie płynął przez nią prąd $I$. Oszacować, ile razy mniejszy prąd będzie płynął w kierunku zaporowym, gdy odwrócimy napięcie.
Rozwiązanie na str. 16