Trójki pitagorejskie

Trójka pitagorejska to trójka (a, b, c) dodatnich liczb całkowitych, które spełniają warunek

(1) $$a^2 + b^2 = c^2,$$

np. $(3, 4, 5)$, $(5, 12, 13)$, albo $(201, 20\,200, 20\,201)$. Jeśli długości boków trójkąta prostokątnego tworzą trójkę pitagorejską, to ów trójkąt nazywamy *trójkątem pitagorejskim*. By dowiedzieć się, jak generuje się trójki pitagorejskie, wystarczy zaopatrzyć w dowód wszystkie podane niżej ponumerowane twierdzenia. Potrzebna jest w tym celu solidna znajomość matematyki w zakresie szkoły podstawowej.

1. Wśród wszystkich trójkątów pitagorejskich podobnych do ustalonego trójkąta istnieje trójkąt najmniejszy. Długości jego przyprostokątnych a i b są liczbami względnie pierwszymi.

Trójkę pitagorejską (a, b, c), w której a i b są względnie pierwsze, nazwiemy *trójką pierwotną*.

2. Trzy liczby naturalne tworzące trójkę pierwotną są parami względnie pierwsze.

Wskazówka: kwadrat dowolnej liczby naturalnej daje z dzielenia przez cztery resztę 0 lub 1.

3. W każdej trójce pierwotnej jedna z liczb a, b jest parzysta, a druga – nie.

W każdym z punktów 4–7 poniżej zakładamy, że trójka liczb naturalnych (a, b, c) jest trójką pierwotną, w której $b = 2k$ jest liczbą parzystą.

4. Dla pewnych liczb naturalnych x, y mamy

(2) $$c - a = 2x, \qquad c + a = 2y.$$

5. Liczby naturalne x, y, określone równaniami (2), są względnie pierwsze.

Z powyższego faktu i z jednoznaczności rozkładu liczby $b^2 = (c-a)(c+a)$ na czynniki pierwsze płynie następujący wniosek.

6. Liczby x i y określone równaniami (2) są pełnymi kwadratami: dla pewnych m, n naturalnych mamy

(3) $$x = n^2, \qquad y = m^2.$$

Ponadto, łatwo sprawdzić, że

7. Dokładnie jedna z pary liczb m, n jest parzysta, a liczba b dzieli się przez 4.

Podsumowując uzyskane do tej pory informacje możemy bez kłopotu podać sposób generowania wszystkich trójek pierwotnych.

8. Jeśli (a, b, c) jest trójką pierwotną, to

(4) $$a = m^2 - n^2, \qquad b = 2mn, \qquad c = m^2 + n^2$$

dla pewnych liczb naturalnych m i n $(m > n)$ jednoznacznie wyznaczonych przez c i a. Liczby m i n są względnie pierwsze; dokładnie jedna z nich jest parzysta.

9. Na odwrót, jeśli liczby naturalne $m > n$ są względnie pierwsze i dokładnie jedna z nich jest parzysta, to liczby a, b i c, określone wzorami (4), tworzą trójkę pierwotną.

Morał z tego wszystkiego płynie następujący.

10. Jeśli r, m i n są dowolnymi liczbami naturalnymi i $m > n$, to liczby

(5) $$a = r(m^2 - n^2), \qquad b = 2rmn, \qquad c = r(m^2 + n^2)$$

tworzą trójkę pitagorejską; w dodatku, w ten sposób można uzyskać wszystkie, nie tylko pierwotne, trójki pitagorejskie (a, b, c).

A na deser proponujemy jeszcze dwa eleganckie twierdzenia.

11. Promień koła wpisanego w trójkąt pitagorejski jest liczbą naturalną.

12. Iloczyn liczb (a, b, c) tworzących trójkę pitagorejską dzieli się przez $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$.

P.S.

Rozwiązanie zadania F 463.
Siła nacisku ciała m na równię wynosi $N = mg\cos\alpha$. Składowa pionowa tej siły $N\cos\alpha = mg\cos^2\alpha$ ciśnie na wagę. Zatem wskazanie wagi podczas ruchu ciała wyniesie

$$w = M + m\cos^2\alpha = 2{,}75 \text{ kg}.$$