Dalekie cyfry π

Paweł STRZELECKI

W pierwszym numerze *Mathematical Intelligencer* z 1997 roku panowie David Bailey, Jonatan i Peter Borweinowie oraz Simon Plouffe w artykule *Poszukiwanie* π opisują m.in. algorytm pozwalający znaleźć np. miliardową cyfrę rozwinięcia liczby π w układzie szesnastkowym, bez konieczności znajdowania poprzednich cyfr. Jest to o tyle ciekawe, że liczba π jest niewymierna, a więc cyfry jej rozwinięcia (przy dowolnej podstawie) układają się w sposób nieokresowy, chaotyczny. Algorytm jest zadziwiająco prosty, matematykę stojącą u jego podstaw zna student pierwszego roku (albo nawet maturzysta z ambicjami), a Czytelnicy lubiący obcować z komputerem bez kłopotów napiszą odpowiedni program. Jednym słowem, aż się prosi, żeby opowiedzieć o wszystkim na naszych łamach.

Punktem wyjścia do konstrukcji algorytmu jest równość

$$\pi = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{16^j}\left(\frac{4}{8j+1} - \frac{2}{8j+4} - \frac{1}{8j+5} - \frac{1}{8j+6}\right). \tag{1}$$

Do zrozumienia kolejnych kroków nietrudnego dowodu wystarczy nam (w zasadzie...) umiejętność znajdowania sumy szeregu geometrycznego i całkowania funkcji wymiernych. Oto szczegóły.

Dla $k \in \{1, 2, \ldots, 7\}$ oraz $x \in (-1, 1)$ mamy

$$\frac{x^{k-1}}{1-x^8} = \sum_{j=0}^{\infty} x^{k-1+8j}.$$

Szereg po prawej stronie jest zbieżny niemal jednostajnie na przedziale $(-1, 1)$, a to znaczy, że można go, bez obaw o wynik, scałkować wyraz po wyrazie na dowolnym przedziale domkniętym zawartym w $(-1, 1)$. Zatem,

$$\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{x^{k-1}}{1-x^8}\,\mathrm{d}x = \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^{1/\sqrt{2}} x^{k-1+8j}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{k+8j}}{k+8j}\bigg|_0^{1/\sqrt{2}} = \frac{1}{2^{k/2}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{16^j(8j+k)}.$$

Korzystając z tej równości łatwo sprawdzamy, że

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{16^j}\left(\frac{4}{8j+1} - \frac{2}{8j+4} - \frac{1}{8j+5} - \frac{1}{8j+6}\right) =$$

$$= \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{4\sqrt{2} - 8x^3 - 4\sqrt{2}x^4 - 8x^5}{1-x^8}\,\mathrm{d}x \overset{\text{ozn.}}{\equiv} I.$$

Osoby starsze o nastawieniu sadystycznym kazałyby tę całkę obliczyć leniwym studentom walczącym o zaliczenie ćwiczeń z analizy. Dla tych, którzy nie dysponują królikami doświadczalnymi, wskazujemy poszczególne kroki.

Po pierwsze, licznik i mianownik fukcji podcałkowej skracamy przez $(1 + x^2)$, a następnie wprowadzamy nową zmienną $y = x\sqrt{2}$, żeby pozbyć się obrzydliwych pierwiastków i otrzymać równość

$$I = \int_0^1 \frac{16(y^3 + y^2 - 2)}{(y^2-2)(y^4+4)}\mathrm{d}x.$$

Rozwiązanie zadania M 828.
Przekształcany okrąg jest częścią wspólną pewnych dwóch sfer nie przechodzących przez punkt O, wobec czego jego obraz w inwersji j jest, na mocy poprzedniego zadania, częścią wspólną dwóch sfer. Jest to więc zbiór pusty, punkt, okrąg albo sfera. Czytelnik zechce samodzielnie wykluczyć przypadki przeczące tezie zadania.
A jaki jest obraz w inwersji j okręgu przechodzącego przez punkt O?

Ponieważ

$$y^3+y^2-2=(y^2+2y+2)(y-1)\,,$$
$$y^4+4=(y^2+2y+2)(y^2-2y+2)\,,$$

więc ostatecznie mamy

$$I=\int\limits_0^1\frac{4y}{y^2-2}\mathrm{d}x-\int\limits_0^1\frac{4y-8}{y^2-2y+2}\mathrm{d}x=$$
$$=\left(2\ln\frac{2-y^2}{y^2-2y+2}+4\,\mathrm{arctg}(y-1)\right)\Bigg|_0^1=\pi\,,$$

co kończy dowód wzoru (1) – nieuczciwy o tyle, że wzór najpierw odgadnięto na podstawie wielu eksperymentów numerycznych, a dopiero potem udowodniono.

Rozważmy teraz jedną z czterech sum po prawej stronie wzoru (1), np.

$$S_1=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{16^j(8j+1)}\,.$$

Cyfrę, która stoi na $(n+1)$-szym miejscu rozwinięcia szesnastkowego liczby S_1, zobaczymy także na samym początku rozwinięcia (szesnastkowego) części ułamkowej liczby $16^n\cdot S_1$. (Kto nie czuje się przekonany, niech sprawdzi najpierw, że cyfra setnych liczby x to $[10(10x-[10x])]$.) By wykorzystać tę prostą obserwację, zapiszmy równości

Uwaga:

$$x \bmod 1 := x-[x]$$

$$16^nS_1-[16^nS_1]=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{16^n}{16^j(8j+1)}\bmod 1=$$
$$=\sum_{j=0}^{n}\frac{16^{n-j}\bmod(8j+1)}{8j+1}\bmod 1+\sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{16^{n-j}}{8j+1}\bmod 1\,.$$

Licznik każdego składnika pierwszej (skończonej!) sumy można łatwo obliczyć, wykorzystując szybki algorytm znajdowania potęg liczby naturalnej opisany przez W. Guzickiego w *Delcie* 3/1997. Dzielenie i dodawanie modulo 1 z rozsądną dokładnością to też operacje nieskomplikowane. Jeśli zaś chodzi o drugą sumę, to wystarczy z niej wziąć kilka początkowych wyrazów – cały nieskończony ogon nie ma bowiem wpływu na pierwszych kilku cyfr rozwinięcia szesnastkowego liczby $16^nS_1-[16^nS_1]$ (można się o tym przekonać stosując kryterium porównawcze i wzór na sumę szeregu geometrycznego).

Kolejne cyfry układu szesnastkowego to: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F.

Z pozostałymi sumami występującymi po prawej stronie (1) należy postąpić podobnie. Dopracowanie szczegółów technicznych, oszacowanie złożoności obliczeniowej i napisanie odpowiedniego programu nie powinno sprawić Zainteresowanym Czytelnikom zbyt wielu trudności. Niejaki Fabrice Bellard twierdzi podobno, że w rozwinięciu szesnastkowym π na miejscu o numerze 10^{11} zaczyna się ciąg cyfr 9C381...Chętnie napiszemy o tym, że nasi Czytelnicy są lepsi.

Zabawa w znajdowanie dalekich cyfr rozwinięć π ma, wbrew pozorom, także pewien sens praktyczny. Dzięki próbom przyspieszania takich obliczeń stworzono m.in. nowe algorytmy szybkiego mnożenia macierzy, szeroko stosowane w różnych dziedzinach. Ponadto, programy obliczające π wykorzystuje się do testowania poprawności działania sprzętu komputerowego i systemów operacyjnych. W styczniu 1986 wykryto np. w ten sposób błąd w działaniu jednego z komputerów Cray 2 w ośrodku obliczeniowym NASA.

Z przykrością informujemy natomiast, że dla cyfr rozwinięcia *dziesiętnego* liczby π podobny algorytm nie jest znany – aby dowiedzieć się, jaka jest n-ta cyfra dziesiętna π, trzeba najpierw poznać wszystkie poprzednie.

Rozwiązanie zadania M 827.
Niech p będzie prostą przechodzącą przez punkt O i środek przekształcanej sfery, P zaś niech będzie dowolną płaszczyzną zawierającą prostą p. Jak łatwo zauważyć, inwersja j będzie przekształcać punkty z płaszczyzny P na punkty z płaszczyzny P, a jeśli rozważać tylko jej obcięcie do płaszczyzny P, to stanie się zwykłą płaską inwersją względem okręgu o środku O i promieniu r. Z własności płaskiej inwersji wnosimy, że przekrój obrazu przekształcanej sfery płaszczyzną P będzie pewnym okręgiem na płaszczyźnie P, o środku leżącym na prostej p. Ponieważ płaszczyznę P możemy wybierać dowolnie, z symetrii obrotowej względem prostej p wynika teza zadania.