Kształty z cieni

Problem odtwarzania *kształtu z zacienienia* lub też problem *SFS*, od angielskiego *shape from shading*, można sformułować jako pytanie: Jak odtworzyć kształt gładkiej powierzchni na podstawie biało–czarnego zdjęcia tej powierzchni? Zmieniająca się od punktu do punktu intensywność obrazu na zdjęciu nosi miano *zacienienia*. Problem SFS pojawił się w latach pięćdziesiątych bieżącego stulecia w fotoklinometrii jako zagadnienie wyznaczania ze zdjęć topografii Księżyca. W połowie lat siedemdziesiątych problem SFS znalazł się w centrum zainteresowania specjalistów od wizji komputerowej próbujących wyposażyć roboty w zdolność odtwarzania trójwymiarowej sceny zdarzeń z dwuwymiarowych zdjęć na potrzeby swobodnego poruszania się po scenie, jak technicznie określa się obserwowaną część przestrzeni. W połowie lat osiemdziesiątych wariant problemu SFS pojawił się w radaroklinometrii jako zagadnienie interpretacji obrazów uzyskanych za pomocą radarów.

Podstawą do rozważania problemu SFS jest określenie związku między kształtem powierzchni i zacienieniem. Związek ten określa *równanie irradiancji obrazu*. Irradiancja obrazu jest technicznym określeniem intensywności obrazu. Terminem pokrewnym jest radiancja sceny, czyli intensywność wypromieniowywania przez scenę światła. Irradiancja obrazu jest proporcjonalna do radiancji sceny, ze współczynnikiem proporcjonalności nie przekraczającym 1.

Aby problem SFS był efektywnie rozwiązalny, trzeba – jak się okazuje – przyjąć pewne założenia upraszczające. Fundamentalne założenie głosi, że obserwowana powierzchnia jest gładka. Ponadto przyjmuje się, że powierzchnia nie zasłania sama siebie, a także, iż światło wielokrotnie odbite od powierzchni wnosi pomijalny wkład w obraz. Na ogół zakłada się też, że źródło światła i urządzenie, w którym powstaje obraz, znajdują się w dużej odległości od obserwowanej powierzchni. Przy tym ostatnim założeniu można uważać, że obraz powierzchni jest efektem padania równoległej wiązki promieni, z których każdy jest prostopadły do płaszczyzny obrazu. Co więcej, zacienienie pochodzące od małego płata powierzchni zależy wówczas wyłącznie od orientacji tego płata w przestrzeni, a nie od bezwzględnej pozycji powierzchni w przestrzeni. Powyższe założenie jest w praktyce spełnione, o ile – przykładowo – źródłem światła jest Słońce, urządzeniem, w którym powstaje obraz, jest aparat fotograficzny zainstalowany na pokładzie lecącego wysoko nad Ziemią samolotu, a obserwowaną powierzchnią jest fragment powierzchni Ziemi.

Ustalmy w przestrzeni kartezjański układ współrzędnych tak, aby osie x i y znajdowały się w płaszczyźnie obrazu. Oznaczmy przez $u(x,y)$ wysokość powierzchni nad płaszczyzną obrazu w punkcie (x,y). Każdy punkt powierzchni ma zatem postać $(x,y,u(x,y))$, a obrazem punktu $(x,y,u(x,y))$ jest punkt (x,y). Przy przedstawionych powyżej założeniach upraszczających równanie irradiancji obrazu przyjmuje postać

$$E(x,y) = R\left(x, y, \frac{\partial u}{\partial x}(x,y), \frac{\partial u}{\partial y}(x,y), \boldsymbol{l}, \rho(x,y)\right),$$

gdzie $E(x,y)$ jest irradiancją obrazu w punkcie (x,y), R jest tak zwaną *funkcją reflektywności*, $\boldsymbol{l}$ jest wektorem jednostkowym określającym kierunek źródła światła, a $\rho(x,y)$ jest wewnętrzną reflektywnością powierzchni, czyli *albedo* w punkcie $(x,y,u(x,y))$. Pochodne cząstkowe $(\partial u/\partial x)(x,y)$ i $(\partial u/\partial y)(x,y)$ jednoznacznie wyznaczają wektor normalny do powierzchni w punkcie $(x,y,u(x,y))$ dany wzorem

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}, \text{ gdzie } \boldsymbol{v} = \left(-\frac{\partial u}{\partial x}(x,y), -\frac{\partial u}{\partial y}(x,y), 1\right).$$

Wektor ten określa orientację w przestrzeni płaszczyzny stycznej do powierzchni w punkcie $(x,y,u(x,y))$. Płaszczyzna ta ograniczona do małego otoczenia punktu $(x,y,u(x,y))$ w dobrym przybliżeniu pokrywa się z płatem powierzchni zawartym w tym otoczeniu. W efekcie można przyjąć, że pochodne $(\partial u/\partial x)(x,y)$ i $(\partial u/\partial y)(x,y)$ wyznaczają orientację małego płata powierzchni wokół $(x,y,u(x,y))$. Przy z góry zadanych R, $\boldsymbol{l}$ i $\rho(x,y)$, równanie irradiancji obrazu wyznacza wszelkie dopuszczalne orientacje płata prowadzące do obrazu o jasności $E(x,y)$ w punkcie (x,y).

Jako warunek na $u(x,y)$, równanie irradiancji obrazu jest równaniem różniczkowym cząstkowym pierwszego rzędu o dwóch zmiennych niezależnych. Jak się okazuje, przy ustalonych R, $\boldsymbol{l}$ i ρ, równanie takie ma na ogół – dla dowolnej (nieujemnej) irradiancji E – nieskończenie wiele rozwiązań *lokalnych* określonych we fragmencie dziedziny obrazu. Może też istnieć wiele rozwiązań *globalnych*, określonych na całej dziedzinie obrazu, a może też i nie być żadnego rozwiązania globalnego. Dla jednoznaczności określenia rozwiązanie globalne musi spełniać dodatkowe *warunki brzegowe*. Wyznaczanie rozwiązań globalnych, spełniających rozmaite warunki brzegowe, okazuje się być problemem ciekawym matematycznie, który w przeciągu ostatnich kilkunastu lat był i nadal jest przedmiotem intensywnych badań.

Wojciech CHOJNACKI