Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1997.

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 XII 1997

Zadania z matematyki nr 347, 348

Redaguje Marcin E. KUCZMA

347. Funkcje f i g (o wartościach rzeczywistych) są ciągłe w przedziale $\langle 0;1\rangle$ i różniczkowalne w punktach wewnętrznych tego przedziału. Dowieść, że dla pewnej pary liczb $x,\ y \in \langle 0;1\rangle$ jest spełniona nierówność $\ (f(x)+g(y)+4xy)^2 \ge 1.$

348. Niech n będzie liczbą naturalną. Obliczyć, ile jest liczb $(6n)$-cyfrowych podzielnych przez 7, o wszystkich cyfrach nieparzystych (zapis dziesiętny).

Zadanie 348 zaproponował pan Waldemar Pompe z Warszawy.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 6/1997

Przypominamy treść zadań:

343. Niech $(g(n)\colon\ n = 1,2,3,\ldots)$ będzie rosnącym ciągiem wszystkich dodatnich liczb całkowitych, które nie są kwadratami liczb całkowitych. Dla liczby rzeczywistej x oznaczmy przez $r(x)$ jedyną liczbę całkowitą leżącą w przedziale $\langle x-\frac{1}{2}\,;\,x+\frac{1}{2}\,)$. Dowieść, że $g(n) = n + r(\sqrt{n}\,)$ dla $n = 1,2,3,\ldots$.

344. Obliczyć kres dolny zbioru liczb będących sumami szeregów postaci

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n^2}{a_{n+1}}, \quad \text{gdzie} \quad a_0 = 1, \quad a_{n-1} \ge a_n > 0 \quad \text{dla} \quad n = 1,2,3,\ldots.$$

343. Ustalmy $n \ge 1$ i przyjmijmy: $m = g(n),\ \ k = m - n$. W zbiorze $\{1,2,\ldots,m\}$ jest n liczb nie będących kwadratami; jest więc k liczb będących kwadratami, a największą z nich jest k^2. Liczba m nie jest kwadratem, i wobec tego $k^2 < m < (k+1)^2$, czyli $\ k^2+1 \le m \le k^2+2k$. Zatem liczba $n = m - k$ spełnia dwustronne oszacowanie

$$(k-\tfrac{1}{2})^2 < k^2-k+1 \le n \le k^2+k < (k+\tfrac{1}{2})^2.$$

To znaczy, że $k = r(\sqrt{n}\,)$, i na mocy określenia liczb $m,\ k$ mamy tezę zadania.

344. Dla ciągu $a_n = 2^{-n}$ rozważana suma ma wartość 4. Zatem kres dolny zbioru wartości badanych sum jest liczbą $\alpha \le 4$. Początkowy wyraz każdego z rozważanych szeregów jest liczbą ≥ 1. Zatem $\alpha \ge 1$.

Weźmy dowolną liczbę $\beta > \alpha$. Istnieje dla niej ciąg liczb dodatnich $1 = a_0 \ge a_1 \ge a_2 \ge \ldots$ wyznaczający szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n^2}{a_{n+1}}$$ o sumie $s < \beta$. Przyjmijmy $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_1}$ dla $n = 0,1,2,\ldots$ tak więc $1 = b_0 \ge b_1 \ge b_2 \ge \ldots$, i wobec tego

$$\alpha \le \sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n^2}{b_{n+1}} = \frac{1}{a_1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_{n+1}^2}{a_{n+2}} = \frac{1}{a_1}\Big(s-\frac{1}{a_1}\Big) < \frac{1}{a_1}\Big(\beta-\frac{1}{a_1}\Big).$$

Otrzymana nierówność, przepisana w równoważnej formie

$$\Big(\frac{1}{a_1}-\frac{\beta}{2}\Big)^2 + \alpha - \frac{\beta^2}{4} < 0,$$

pokazuje, że $4\alpha < \beta^2$. Skoro β jest dowolnie wybraną liczbą większą od α, możemy przejść do granicy $(\beta \to \alpha+)$, otrzymując: $4\alpha \le \alpha^2$. A ponieważ $\alpha > 0$, zatem $\alpha \ge 4$.

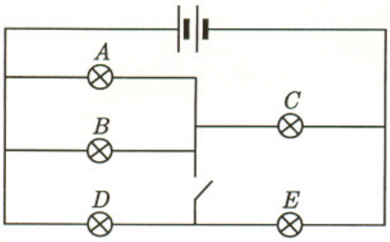
Na początku stwierdziliśmy, że $\alpha \le 4$. Wniosek: kres dolny, o który chodzi w zadaniu, jest równy 4.

Zadania z fizyki nr 244, 245

Redaguje Jerzy B. BROJAN

244. Źródło dźwięku harmonicznego o stałej częstotliwości f_0 spada pionowo z przyspieszeniem $\mathrm{g} = 9,8\ \mathrm{m/s^2}$ i w chwili t_0 mija z prędkością v_0 nieruchomy mikrofon, który o $t = 5$ s wcześniej odebrał dźwięk o częstotliwości $f_1 = 1200$ Hz, a o t później (w chwili „symetrycznej” względem t_0) odebrał dźwięk o częstotliwości $f_2 = 800$ Hz. Obliczyć f_0 i v_0. Prędkość dźwięku w powietrzu jest równa $\mathrm{c} = 340$ m/s.

245. W przedstawionym obwodzie żaróweczki są jednakowe. Jak zareagują (i czy zareagują) na zamknięcie klucza?



Rozwiązanie zadania z fizyki z numeru 6/1997

Przypominamy treść zadania:

241. Sześć jednakowych prętów połączono przegubowo tworząc szkielet czworościanu, który postawiono na gładkiej poziomej płycie. O ile przesunie się górny wierzchołek czworościanu pod wpływem siły F skierowanej w dół, jeśli stała sprężystości (stosunek siły do wydłużenia lub skrócenia) jest dla każdego z prętów równa k? Pominąć siłę ciężkości i założyć, że deformacja czworościanu jest niewielka.

241. Wprowadźmy kąt α między wysokością czworościanu a jego krawędzią boczną; zatem $\cos\alpha = \sqrt{2/3}$, $\sin\alpha = \sqrt{1/3}$. Wyznaczamy siłę F_1 ściskającą każdy z trzech górnych prętów:

$$F_1 = \frac{F}{3\cos\alpha} = \frac{F}{\sqrt{6}}\,.$$

Pozioma składowa tej siły jest równa $F_1\sin\alpha$, a stąd siła rozciągająca każdy z trzech dolnych prętów wynosi

$$F_2 = \frac{F_1\sin\alpha}{\sqrt{3}} = \frac{F}{3\sqrt{6}}\,.$$

W wyniku działania siły F_1 każdy z górnych prętów ulega skróceniu o $\Delta l_1 = F_1/k$, a w następstwie tego górny wierzchołek czworościanu przesuwa się w dół o $\Delta y_1 = \Delta l_1/\cos\alpha$. Wynikiem działania siły F_2 jest wydłużenie każdego z dolnych prętów o $\Delta l_2 = F_2/k$, czyli każdy z wierzchołków podstawy oddali się od środka o $\Delta s = \Delta l_2/\sqrt{3}$; z kolei pociągnie to za sobą obniżenie górnego wierzchołka o $\Delta y_2 = \Delta s\,\mathrm{tg}\,\alpha$. Szukane przesunięcie górnego wierzchołka Δy jest sumą Δy_1 i Δy_2, a po podstawieniach otrzymujemy

$$\Delta y = \frac{5F}{9k}\,.$$