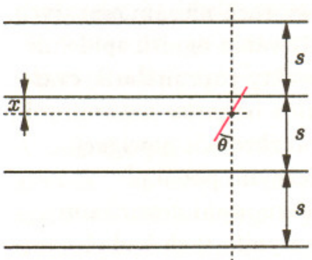
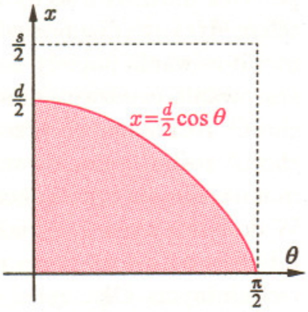
Igła Buffona

Rozważmy następujący problem: upuszczamy igłę o długości d na podłogę z jednakowych, równolegle ułożonych desek o szerokości $s > d$ (rys. 1). Jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenia Z polegającego na tym, że po upadku igła będzie przecinać jedną ze szpar w podłodze?

Z uwagi na symetrię problemu położenie igły można opisać dwiema liczbami: odległością x jej środka od najbliższej szczeliny oraz kątem θ między igłą a kierunkiem prostopadłym do wszystkich szczelin. Wszystkie położenia igły to prostokąt $\Omega = \{(\theta, x)\colon\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le x \le \frac{s}{2}\}$, który będzie naszą przestrzenią zdarzeń elementarnych.



Rys. 1



Rys. 2

Prawdopodobieństwo (tzw. *geometryczne*) określimy wzorem $P(A) = |A|/|\Omega|$ (gdzie $|X|$ oznacza pole X).

Definicja jest o tyle rozsądna, że nie wyróżnia żadnego z położeń igły.

Gdy igła dotyka do szczeliny w podłodze samiutkim koniuszkiem, to wtedy mamy $\frac{x}{d/2} = \cos\theta$. Zatem, igła będzie przecinać jedną ze szpar podłogi wtedy i tylko wtedy, gdy $x < \frac{d}{2}\cos\theta$. Zdarzenie Z jest więc podzbiorem prostokąta Ω zawartym pod wykresem funkcji $x(\theta) = \frac{d}{2}\cos\theta$ (rys. 2). Wynika stąd, że

$$P(Z) = \frac{\int_0^{\pi/2} \frac{d}{2}\cos\theta \, \mathrm{d}\theta}{\frac{\pi}{2}\cdot\frac{s}{2}} = \frac{2d}{s\pi}.$$

Jeśli dodatkowo mamy $s = 2d$, to wtedy $P(Z) = 1/\pi$. Z prawa wielkich liczb wynika zatem, że jeśli rzucimy igłę dużo razy, to stosunek liczby n wszystkich rzutów do liczby k tych rzutów, w których igła przecięła jedną ze szczelin, będzie w przybliżeniu równy π.

Rzucanie igłą na podłogę (albo poliniowany arkusz papieru) można więc traktować jako sposób wyznaczania przybliżeń liczby π. Na ten niecodzienny pomysł wpadł w 1777 roku Georges Leclerc de Buffon, przyrodnik, filozof i hulaka, skądinąd znacznie bardziej znany jako autor, wspólnie z Daubentonem i Lacépède'em, 44-tomowej *Historii naturalnej*. Każdy z tych trzech panów ma dziś w Paryżu, w Dzielnicy Łacińskiej tuż obok Ogrodu Botanicznego, ulicę swego imienia.

P.S.

Jak podejmować decyzje?

Wśród szczególnie ciekawych i istotnych problemów, których rozwiązania mają olbrzymie zastosowanie w wielu dziedzinach nauk i w praktyce, są tak zwane problemy decyzyjne. Można je krótko sformułować w sposób następujący: „Jaką podjąć decyzję na podstawie posiadanej wiedzy o danym zjawisku?”. Poczynając od zastosowań medycznych, zagadnienie takie można postawić jako np. stwierdzanie na podstawie wyników pomiarów EEG, czy dziecko ma szansę zachorowania lub czy jest chore na epilepsję. Innym przykładem jest kompleksowa analiza sytuacji rynku w celu przewidzenia zmian cen akcji danego waloru na giełdzie papierów wartościowych.

Stając przed problemami decyzyjnymi należy zdać sobie sprawę z możliwych trudności związanych ze znalezieniem właściwej odpowiedzi. Błędność podjętej decyzji kojarzy się głównie z brakiem reprezentatywności bądź niepełnością posiadanej wiedzy. W istocie, umiejętne wykorzystanie posiadanej wiedzy dla poprawnej klasyfikacji (podejmowania decyzji) jest zadaniem niezwykle złożonym.

Jednym z najczęstszych sposobów reprezentacji wiedzy jest traktowanie jej podmiotów jako obiektów opisanych przez pewne cechy. Najczęściej mamy do czynienia z tablicami danych, gdzie wiersze reprezentują obiekty, kolumny zaś – wartości cech je opisujących. Problem decyzyjny jest wtedy określony przez wyodrębnienie jednej z cech (kolumn) jako decyzji. Wykrycie faktycznych zależności między warunkami (pozostałymi cechami) a decyzją na podstawie obserwacji znanych obiektów, a więc wiedzy szczątkowej, nie jest jednak łatwe, chociażby wobec braku wiedzy o wszystkich istotnych cechach. Dlatego, między innymi w celu poprawy efektywności procesu decyzyjnego, pełne zależności zastępowane są często zależnościami przybliżonymi. Innym problemem, pojawiającym się w szczególności dla wspomnianych na początku przykładów, jest zbyt duży rozmiar informacji w stosunku do dostępnej mocy obliczeniowej komputerów. W takich przypadkach niemożliwe jest zastosowanie dotychczas opracowanych metod wykrywania zależności. Rozwiązaniem może tu być rozbicie (dekompozycja) dużych tablic. Wnioskowanie o stanie globalnym na podstawie lokalnej analizy tak otrzymanych próbek wydaje się być związane ze zrozumieniem i przełożeniem na język komputerowy procesów myślowych samego człowieka.

Piotr SYNAK, Dominik ŚLĘZAK