Słowo Banacha

Proponujemy sprawdzanie własnej sprawności na izometriach płaszczyzny – słowo Banacha będzie punktem docelowym naszych rozważań.

Izometria – przekształcenie nie zmieniające odległości.

A oto ciąg twierdzeń, z których każde nietrudno wynika z poprzednich. Szanowny Czytelniku – przypomnij sobie lub wymyśl odpowiadające im dowody. Nie ma tu nic, czego nie miałby wiedzieć uczeń szkoły średniej, więc na pewno każdemu się uda. Przypominamy: izometrie, o których mowa, to izometrie płaszczyzny.

Figura stała w danym przekształceniu to taka, że obraz każdego jej punktu też jest jej punktem – punkty te nie muszą być stałe.

1. Jeśli izometria ma jeden punkt stały, to stałe są wszystkie okręgi o środku w tym punkcie.

2. Jeśli izometria ma dwa punkty stałe A i B, to ma ich więcej – co najmniej wszystkie punkty prostej AB.

3. Jeśli izometria ma trzy niewspółliniowe punkty stałe, to jest identycznością (każdy punkt jest jej punktem stałym).

4. Izometria jest jednoznacznie wyznaczona przez obrazy trzech niewspółliniowych punktów.

Symetria osiowa – izometria, której wszystkie punkty stałe tworzą prostą.

5. Każda izometria jest złożeniem dwóch lub trzech symetrii osiowych (najlepszą formą dowodu jest tu podanie algorytmu nakładającego za pomocą symetrii dany trójkąt na przystający do niego).

6. Złożenie dwóch symetrii o osiach równoległych to przesunięcie (nie od rzeczy jest tu wskazać wektor tego przesunięcia).

7. Złożenie dwóch symetrii o osiach przecinających się to obrót (o jaki kąt?).

8 (Arnold Schmidt). Złożenie trzech symetrii osiowych o osiach parami równoległych, jak też o osiach przechodzących przez jeden punkt, to też symetria osiowa.

Symetria z poślizgiem – złożenie symetrii z przesunięciem o wektor równoległy do jej osi; jedynie wtedy obojętna jest kolejność wykonywania tych przekształceń.

9. Pozostałe złożenia symetrii osiowych to symetrie z poślizgiem.
Uwaga: twierdzenia 6 – 9 składają się na twierdzenie Michela Chaslesa: *każda izometria płaszczyzny to przesunięcie, obrót lub symetria z poślizgiem* (dopuszczamy poślizg zerowy).

10. Złożenie dwóch przesunięć to też przesunięcie.

11. Złożenie dwóch obrotów to obrót lub przesunięcie (kiedy co?).

12. Jeśli przekształcenie φ jest izometrią, to φ^2 jest przesunięciem lub obrotem.

Dla dowolnego przekształcenia λ i μ przez $\mu\lambda$ rozumiemy złożenie, czyli wykonanie najpierw przekształcenia λ, a potem μ, przez λ^2 oznaczamy złożenie przekształcenia λ z nim samym, przez λ^{-1} oznaczamy przekształcenie odwrotne do λ itd.

13. Jeśli φ i ψ są izometriami, to $\varphi^2\psi^2\varphi^{-2}\psi^{-2}$ jest przesunięciem.
Tu warto chyba dać wskazówki.
1° Należy oddzielnie rozpatrzeć cztery przypadki wyznaczone przez twierdzenie 12, a więc przesunięcie-przesunięcie, przesunięcie-obrót, obrót-przesunięcie, obrót-obrót, z których istotnie trudny jest ostatni.
2° Jeśli γ i δ są obrotami o różnych środkach i ich złożenie też jest obrotem, to $\delta\gamma$ i $\gamma\delta$ są obrotami o ten sam kąt, ale o różnych środkach.
3° W przypadku przesunięcie-przesunięcie zawsze otrzymujemy identyczność – to tutaj nie ma znaczenia, ale bardzo pomaga w dowodzie następnego twierdzenia.

14 (Stefan Banach). Jeśli φ i ψ są izometriami, to

$$\varphi^2\psi^2\varphi^{-2}\psi^{-2}\varphi^{-2}\psi^2\varphi^4\psi^{-2}\varphi^{-2}\psi^2\varphi^{-2}\psi^{-2}\varphi^2$$

jest identycznością.
Tu wskazówka jest prosta: zamiast φ^4 należy napisać $\varphi^2\psi^{-2}\psi^2\varphi^2$ i podzielić cały napis nawiasami na cztery części jednakowej długości.

Jeśli wszystko przebiegło sprawnie, to teraz dwa istotnie trudniejsze do dowodu fakty: napis Banacha jest najkrótszym możliwym, algebraicznie nietrywialnym napisem opisującym za pomocą dowolnych izometrii płaszczyzny identyczność, to pierwszy, i drugi – dla izometrii przestrzeni taki napis nie istnieje.

Słowo Banacha ma związek z problemem paradoksalnego rozkładu kuli i istnieniem miary uniwersalnej, ale to zupełnie inna historia.

M.K.