Początkowe cyfry symboli Newtona

Grzegorz BARTCZAK i Andrzej NOWICKI

Jeśli n, k są liczbami naturalnymi oraz $n \geq k$, to przez $\binom{n}{k}$ oznacza się liczbę $\frac{n!}{k!(n-k)!}$. Wiadomo, że $\binom{n}{k}$ jest liczbą naturalną, będącą liczbą wszystkich k-elementowych podzbiorów zbioru n-elementowego. Spójrzmy na kilka przykładów.

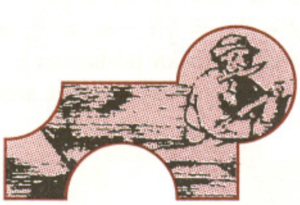
$$\binom{1997}{1} = 1997 \qquad \binom{1562}{6} = 19979205577825494$$

$$\binom{1999}{2} = 1997001 \qquad \binom{7207}{7} = 199795303587200399319241$$

$$\binom{494}{3} = 19970444 \qquad \binom{4108}{8} = 1997841430944510255346671$$

$$\binom{4681}{4} = 19979587391790 \qquad \binom{9653}{9} = 1997917655787531327615853237150$$

$$\binom{7517}{5} = 199739353621084563 \qquad \binom{158}{10} = 1997837760676615$$



Każda z wypisanych tu liczb rozpoczyna się cyframi $1, 9, 9, 7$. Nasuwa się pytanie:

Czy dla każdego k istnieje takie n, że liczba $\binom{n}{k}$ jest postaci $1997\ldots$?

Wykażemy, że odpowiedź na to pytanie jest pozytywna. Wykażemy więcej. Udowodnimy następujące twierdzenie.

Twierdzenie
Niech k będzie liczbą naturalną i niech $c_1 \neq 0, c_2, \ldots, c_m$ będzie dowolnym ciągiem cyfr układu dziesiętnego. Istnieje wtedy taka liczba naturalna n, że początkowe cyfry liczby $\binom{n}{k}$ są równe odpowiednio $c_1, c_2, \ldots, c_m$.

W dowodzie tego twierdzenia wykorzystamy dwa prościutkie lematy.

Lemat 1
Załóżmy, że a, b, c są liczbami rzeczywistymi, $b > a$ oraz $c > 0$. Istnieje wtedy taka liczba naturalna s_0, że dla wszystkich liczb naturalnych $s \geq s_0$ zachodzi nierówność $sb > sa + c$.

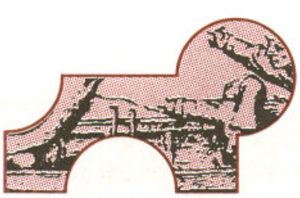
Dowód
Niech $s_0 = \left[\frac{c}{b-a}\right] + 1$ (przez $[x]$ oznaczamy część całkowitą liczby x). Wówczas s_0 jest liczbą naturalną i dla wszystkich $s \geq s_0$ mamy:

$$s \geq s_0 = \left[\frac{c}{b-a}\right] + 1 > \frac{c}{b-a}.$$

Zatem, jeśli $s \geq s_0$, to $s(b-a) > c$, czyli $sb > sa + c$.

Lemat 2
Niech u, v będą liczbami rzeczywistymi i niech k będzie liczbą naturalną. Załóżmy, że $u - v > k > 1$. Istnieje wtedy taka liczba naturalna n, że $u > n > n - k + 1 > v$.

Dowód
Przyjmijmy $n = [v] + k$. Wtedy:
$u > v + k \geq [v] + k = n > n - k + 1 = [v] + 1 > v$.



Teraz możemy już udowodnić zapowiedziane twierdzenie.

Dowód twierdzenia
Niech $a = \sqrt[k]{M}$, $b = \sqrt[k]{M+1}$, $c = \sqrt[k]{(k!)^{k-1}}$, gdzie

$$M = c_1 10^{m-1} + c_2 10^{m-2} + \cdots + c_{m-1} 10 + c_m.$$

Twierdzenie jest oczywiste dla $k=1$. W tym przypadku wystarczy za n przyjąć liczbę M (gdyż $\binom{M}{1}=M$). Załóżmy więc dalej, że $k>1$.

Z lematu 1 wynika, że istnieje liczba naturalna t spełniająca nierówność $10^t b > c + 10^t a$, czyli

$$10^t \sqrt[k]{M+1} > \sqrt[k]{(k!)^{k-1}} + 10^t \sqrt[k]{M}\,.$$

Mnożąc tę nierówność stronami przez $\sqrt[k]{k!}$ otrzymujemy:

$$10^t \sqrt[k]{(M+1)k!} > k! + 10^t \sqrt[k]{M \cdot k!}$$

i stąd

$$10^t \sqrt[k]{(M+1)k!} - 10^t \sqrt[k]{M \cdot k!} > k! \geq k > 1\,.$$

Z lematu 2 wynika teraz, że istnieje liczba naturalna n spełniająca nierówności:

$$10^t \sqrt[k]{(M+1)k!} > n > n-k+1 > 10^t \sqrt[k]{M \cdot k!}\,.$$

Podnosząc to do k-tej potęgi i dzieląc stronami przez $k!$ otrzymujemy:

$$10^{kt}(M+1) > \frac{n^k}{k!} > \frac{(n-k+1)^k}{k!} > 10^{kt} M$$

i stąd dalej

$$10^{kt}(M+1) > \frac{n^k}{k!} > \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k} > \frac{(n-k+1)^k}{k!} > 10^{kt} M\,.$$

Wykazaliśmy zatem, że istnieje taka liczba naturalna n, że

$$10^{kt}(M+1) > \binom{n}{k} > 10^{kt} M\,.$$

Początkowe cyfry liczby $\binom{n}{k}$ są więc odpowiednio równe cyfrom liczby M, czyli cyfrom $c_1, c_2, \ldots, c_m$. To kończy dowód twierdzenia. ■

Przypomnijmy (patrz na przykład [1]), że liczbą *trójkątną* nazywamy każdą liczbę postaci

$$t_n = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}\,,$$

a liczbą *tetraedralną* nazywamy każdą liczbę postaci

$$T_n = t_1 + t_2 + \cdots + t_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}\,.$$

Ponieważ $t_n = \binom{n+1}{2}$ oraz $T_n = \binom{n+2}{3}$, więc z przedstawionego twierdzenia wynikają następujące dwa wnioski.

Wniosek 1 ([1], str. 41)
Niech $c_1 \neq 0, c_2, \ldots, c_m$ będzie dowolnym ciągiem cyfr układu dziesiętnego. Istnieje wtedy liczba trójkątna t_n, której początkowe cyfry są równe odpowiednio $c_1, c_2, \ldots, c_m$.

Wniosek 2 ([1], str. 57)
Niech $c_1 \neq 0, c_2, \ldots, c_m$ będzie dowolnym ciągiem cyfr układu dziesiętnego. Istnieje wtedy liczba tetraedralna T_n, której początkowe cyfry są równe odpowiednio $c_1, c_2, \ldots, c_m$.

Twierdzenie zachodzi dla cyfr dowolnego układu numeracji (niekoniecznie dziesiętnego). Chcąc się o tym przekonać wystarczy w przedstawionym dowodzie zastąpić wszystkie występujące w nim liczby 10 podstawą numeracji $q>1$. Z dowodu wynika również, że liczb n, o których mowa w twierdzeniu, istnieje nieskończenie wiele.

Na zakończenie zanotujmy pytanie:

Czy liczby postaci $n!$ oraz liczby postaci $\binom{2n}{n}$ mają własność opisaną w twierdzeniu ?

Autorzy nie znają odpowiedzi na to pytanie.

Literatura

[1] W. Sierpiński, *Liczby trójkątne*, Biblioteczka Matematyczna 12, PZWS, Warszawa, 1962.

Rozwiązanie zadania M 820.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{n=2^{k-1}+1}^{2^k} a_n\right) \geq$$

$$\geq a_1 + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1} a_{2^k} = a_1 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}\,.$$

Z drugiej strony,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} a_n\right) \leq$$

$$\leq a_1 + \sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}\,.$$

Zatem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k} < \infty$, co było do udowodnienia.

Rozwiązanie zadania M 821. Na mocy zadania **M 820** wystarczy zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \cdot \frac{1}{(2^k)^\alpha} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(2^{1-\alpha}\right)^k\,.$$

Dla $\alpha = 1$ jest to, oczywiście, szereg rozbieżny, natomiast dla $\alpha > 1$ – zbieżny szereg geometryczny, co dowodzi tezy zadania.

Rozwiązanie zadania M 822. Na mocy zadania **M 820** wystarczy zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \cdot \frac{1}{2^k(\log_2 2^k)^\alpha} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}\,.$$

Teza zadania wynika więc bezpośrednio z tezy zadania **M 821.**