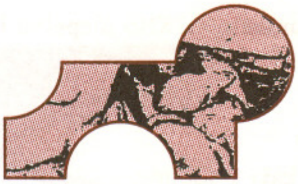
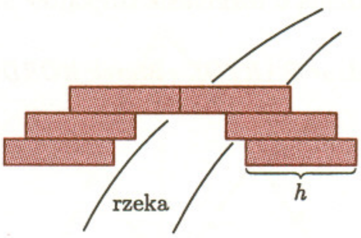


Mosty z klocków

Piotr RYBKA

W czasie ostatniej rodzinnej wizyty w Muzeum Techniki dotarliśmy do działu poświęconego budownictwu mostowemu. Obok ogromnych makiet, plansz i rysunków był skromny stół z trzema kompletami drewnianych klocków: dwoma łukowymi i jednym zestawem zwykłych, prostopadłościennych o kwadratowej podstawie. Podczas gdy córka wybrała zajęcia mniej obciążające, rodzice zajęli się sprawdzaniem swych umiejętności konstruktorskich. Najtrudniejsze okazało się zadanie z klockami prostopadłościennymi: były dane dwa klocki podstawy, odstęp między nimi równał się dwóm wysokościom klocków, most należało zbudować z pozostałych ośmiu. Pierwsze naiwne próby spaliły na panewce – konstrukcja się waliła. Potem żona zauważyła, że trzeba most budować od góry i było jasne, że trzeba zastanowić się nad optymalnym sposobem budowania. Nie było nam dane przeprowadzić tego w muzeum.

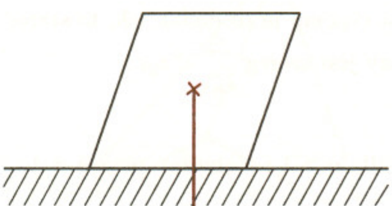
Dopiero w zaciszu domowym można było znaleźć i zapisać rozwiązanie problemu: *ile jednakowych, jednorodnych klocków potrzeba do zbudowania mostu nad rzeką o szerokości l, tak by klocki podstawy pewnie stały na brzegu i nie przewieszały się nad rzeką?*



Autor przyznaje, że nie widział w praktyce tak budowanego mostu. Naszym poczynaniom nadajmy więc miano inżynierii klockowej. Postawiony problem dzięki swej prostocie łatwo poddaje się analizie. Dostrzegamy od razu naturalne pytania, na które każdy budowniczy musi sobie odpowiedzieć: (1) jakie zjawiska fizyczne są istotne? (2) czy zadanie jest wykonalne? i (3) jak przy danych ograniczeniach zbudować stukturę optymalną?

Ostatnie pytanie na ogół jest najtrudniejsze. Od razu jednak możemy spostrzec jedną rzecz: most powinien być symetryczny. Bo gdyby nie był, to jedna połowa przęsła byłaby dłuższa od drugiej (obie mają po tyle samo klocków), a wtedy dłuższy most można by zbudować kopiując symetrycznie owo dłuższe przęsło. Zatem od tej chwili zajmujemy się wyłącznie symetrycznymi mostami.

Jak powiedzieliśmy, trzeba zacząć od zrozumienia fizyki (w tym przypadku statyki) problemu. Ze szkoły wiadomo, że bryła pozostaje w równowadze, jeśli rzut jej środka ciężkości nie wychodzi poza obręb podstawy.



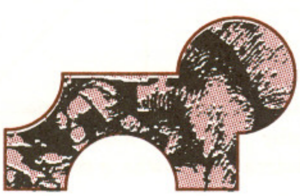
Musimy zatem umieć wyznaczyć środek ciężkości układu klocków. Rachunki upraszczają się, gdy przedstawimy układ U jako rozłączną sumę podukładów U_1 i U_2, których masy i środki ciężkości są znane. Wtedy zadanie sprowadza się do wyznaczenia środka ciężkości dwóch odległych o d jednostek punktów materialnych o masach m_1 i m_2 – mówiąc o odległościach będziemy tu i dalej myśleli jedynie o „odległości w poziomie", czyli o odległości rzutów. Ich odległości d_i od środka ciężkości całego układu spełniają równania

$$\begin{cases} d_1 + d_2 = d, \\ m_1 d_1 = m_2 d_2. \end{cases}$$

Łatwo stąd wyliczyć, że

$$(*) \qquad d_1 = d\frac{m_2}{m_1 + m_2} \quad \text{i} \quad d_2 = d\frac{m_1}{m_1 + m_2}.$$

Jeśli pamiętamy, że środek ciężkości klocka wypada w połowie jego wysokości, to powyższy wzór całkowicie wystarczy do dalszych obliczeń.



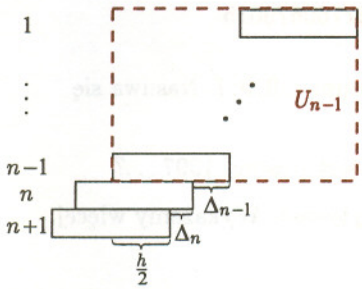
Zajmijmy się matematyczną stroną problemu. Nasz most będziemy budować od góry, to znaczy będziemy dokładać kolejne klocki od dołu. Przez s_i oznaczymy odległość środka ciężkości i-tego klocka od środka ciężkości układu powstałego przez dołożenie tego klocka do zbudowanego już układu $i-1$ klocków.

(1) Przypuśćmy, że mamy dwa klocki podstawy i dwa, z których budujemy przęsło. Zadanie jest łatwe: klocek przęsła nie może być wysunięty dalej niż $\frac{1}{2}h$,

bo wtedy rzut jego środka ciężkości będzie wychodził poza obręb podstawy i most runie, tj. połowa przęsła l_1 to $\frac{1}{2}h$. Połóżmy jeszcze $\Delta_1 = l_1$ i nazwijmy ten układ klocków U_1.

(2) Dajmy na to, że (prócz podstawy) mamy 2 klocki do budowy połówki przęsła. By długość przęsła była największa, optymalny układ U_1 dwóch klocków (opisany wyżej) stawiamy na trzecim tak, aby środek ciężkości U_1 wypadał na krawędzi podstawy trzeciego klocka. Każda próba większego wysunięcia któregokolwiek klocka kończy się katastrofą budowlaną. Znajdźmy jeszcze środek ciężkości układu U_1. Jest to łatwe: mamy 2 punkty materialne (rzuty środków ciężkości klocków) o równych masach odległe o $\frac{1}{2}h$, zatem ze wzoru $(*)$ wynika, że ich środek ciężkości wypada w $\frac{1}{4}h$, tj. $s_2 = \frac{1}{4}h$. Daje to możliwość wysunięcia U_1 o $\Delta_2 = \frac{1}{2}h - s_2$ nad krawędź trzeciego klocka. Tym samym długość połowy przęsła wynosi $l_2 = l_1 + \Delta_2$.

(n) Możemy teraz zastanowić się nad przypadkiem ogólnym: oprócz klocka podstawy mamy n klocków do budowy połowy przęsła. Zakładamy, że wiemy już, jak ułożyć połowę (najdłuższego możliwego) przęsła z $n-1$ klocków – nazwijmy ten układ U_{n-1}, odpowiadającą mu długość przęsła oznaczmy przez l_{n-1} i przyjmijmy jeszcze, że $s_{n-1} < \frac{1}{2}h$.



Ze wzoru $(*)$ wynika, że gdy środek ciężkości U_{n-1} znajduje się na prawej krawędzi n-tego klocka, to $s_n = \frac{h}{2}\frac{n-1}{n}$. Wynika stąd od razu, że $s_n < \frac{1}{2}h$, a cały opisany przed chwilą układ możemy wysunąć o $\Delta_n = \frac{1}{2}h - s_n = \frac{h}{2n}$ nad podstawę (tak, by środek ciężkości wypadał na krawędzi klocka podstawy). Żadnego z klocków bardziej wysunąć się nie da, bo przesuwałoby to rzut środka ciężkości układu n klocków poza obręb podstawy.

Zatem połowa długości nowego przęsła to

$$l_n = l_{n-1} + \Delta_n = \Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_n =$$
$$= \frac{1}{2}h\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}h\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\,.$$

Powyższe rozumowanie to nic innego, jak (indukcyjny) dowód następującego twierdzenia.

Twierdzenie. *Mając $2n$ jednakowych i jednorodnych klocków o wysokości h do budowy przęsła i dodatkowo dwa takie same klocki podstawy, można z nich zbudować symetryczny most nad rzeką o największej szerokości równej $h\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$.*

Od razu zauważamy, że zadanie z muzeum było wykonalne, bo $2 < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{25}{12}$. Można jeszcze zadać pytanie, czy są rzeki, nad którymi nie da się zbudować mostu opisaną metodą. Jest to pytanie o zbieżność szeregu harmonicznego $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}$.

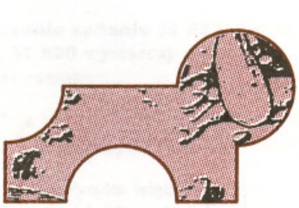
Inny dowód rozbieżności szeregu harmonicznego można znaleźć w zadaniach **M 820** i **M 821**.

Niech $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$. Zauważmy, że dla $n > 2^k$ mamy $S_n \geq S_{2^k}$. Ponadto,

$$S_{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^k}\right) >$$
$$> 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \ldots + \frac{2^{k-1}}{2^k} = 1 + \frac{k}{2}\,.$$

Wynika stąd

Wniosek. *Rzeka może być dowolnie szeroka.*



Choć wiedza z zakresu inżynierii klockowej może nie wystarczyć do zbudowania prawdziwego mostu, to jednak budowniczowie prawdziwych mostów potrzebują matematyki. Muszą umieć dostrzegać ogólniejsze związki w szczególnych praktycznych problemach; muszą też umieć analizować otrzymane w ten sposób abstrakcyjne zadanie. Myśmy zrobili to samo, choć na zabawową skalę.