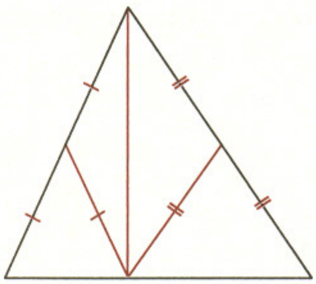
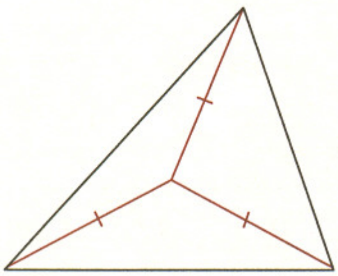
Trójkąt równoramienny

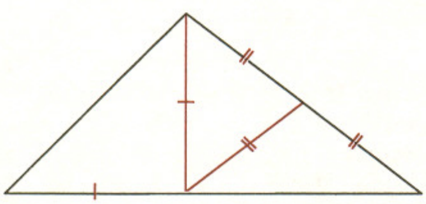
O trójkącie równoramiennym każdy słyszał i każdy coś o nim wie. To taki, który ma dwa boki równe. W takim trójkącie kąty między każdym z równych boków a tym trzecim są równe. To twierdzenie nosi łacińską nazwę *pons asinorum*, czyli *ośli most*, gdyż już od Starożytności panowało przekonanie, że ten, kto nie umie tego dowieść, niczego nie jest w stanie się nauczyć.

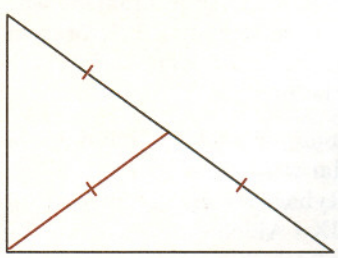
Trójkąty równoramienne mają tę miłą własność, że można z nich zbudować każdy trójkąt. Mówiąc dokładniej, każdy trójkąt można podzielić na cztery trójkąty równoramienne (rys. 1) – ale każdy trójkąt ostrokątny można podzielić na trzy takie trójkąty (rys. 2), podobnie jak niektóre, nawet nieskończenie wiele (ale nie wszystkie!), rozwartokątne (rys. 3), natomiast każdy trójkąt prostokątny można rozłożyć na dwa trójkąty równoramienne (rys. 4). To ostatnie spostrzeżenie wykorzystywano w starożytnym Egipcie do wyznaczania kąta prostego. Stosowny przyrząd stanowił patyk, w którego połowie przywiązany był sznurek sięgający akurat do końca patyka (rys. 5); każdy bez trudu wymyśli, jak się czegoś takiego używa.

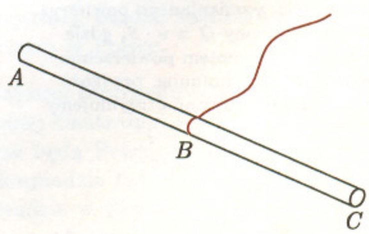
Tak się zresztą składa, że wśród trójkątów ostrokątnych jest nieskończenie wiele takich, które dadzą się podzielić na dwa trójkąty równoramienne w taki sposób, jak na rysunku 6, i nieskończenie wiele takich, które dadzą się rozbić tak, jak na rysunku 7.


Rys. 1


Rys. 2

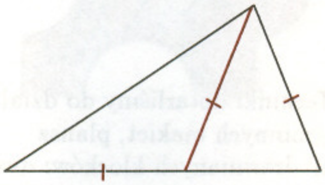

Rys. 3


Rys. 4



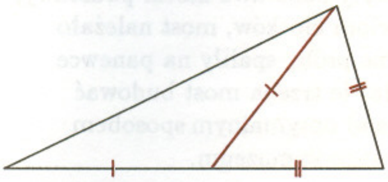
Rys. 5. $AB = BC =$ długość sznurka

Cóż jeszcze można powiedzieć o trójkącie równoramiennym? Oto niepełna lista jego własności:



Rys. 6

1. Ma oś symetrii.
2. Jedna z jego wysokości jest symetralną boku.
3. Jedna z jego wysokości dzieli go na dwa trójkąty podobne.
4. Jedna z jego wysokości jest dwusieczną kąta przy wierzchołku.
5. Jedna z jego wysokości dzieli go na dwa trójkąty o równych polach.
6. Istnieje okrąg zawierający dwa wierzchołki, który ma środek w trzecim.
7. Jego suma z odbiciem symetrycznym względem jednego z boków jest równoległobokiem.
8. Środek okręgu opisanego na nim, środek okręgu wpisanego i jeden z wierzchołków są współliniowe.
9. Jeśli przez środki pewnych dwóch jego boków przeprowadzić prostą równoległą do trzeciego i odbić symetrycznie względem tej prostej część o mniejszym polu, to otrzyma się cztery trójkąty podobne.



Rys. 7

No dobrze, i co z tego? Właśnie. Po pierwsze, spróbujcie uzupełnić tę listę o (niezbyt trywialne) dalsze własności. Po drugie, zastanówcie się, czy wśród tych dziewięciu własności, a także wśród tych, które sami wymyślicie, są takie, które przysługują *tylko* trójkątom równoramiennym. Wreszcie, po trzecie: jak uzasadnić wszystkie przedstawione wyżej twierdzenia o rozkładzie trójkątów na trójkąty równoramienne?

Małą Deltę opracowali: Wiktor BARTOL i Marek KORDOS

Zadania

Redaguje Krzysztof OLESZKIEWICZ

M 820. Udowodnić, że jeśli (a_n) jest nierosnącym ciągiem liczb dodatnich, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżny jest szereg $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$.
Rozwiązanie na str. 15

M 821. Udowodnić, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ jest zbieżny dla $\alpha > 1$ i rozbieżny przy $\alpha = 1$.
Rozwiązanie na str. 15

M 822. Udowodnić, że szereg $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log_2 n)^\alpha}$ jest zbieżny dla $\alpha > 1$ i rozbieżny przy $\alpha = 1$.
Rozwiązanie na str. 15

Redaguje Jarosław KULPA

F 459. Oszacować, o ile dłuższy jest dzień od nocy na równiku w dniu astronomicznej równonocy. Współczynnik załamania powietrza jest równy $n = 1{,}000280$, a promień kątowy Słońca $\alpha = 0{,}25°$.
Rozwiązanie na str. 9

F 460. Wentylator wywietrznika w łazience ma moc $P_0 = 15$ W. Promień wywietrznika jest równy $r = 6$ cm. Oszacować, ile powietrza może maksymalnie wymienić wentylator w ciągu sekundy. Ile razy należałoby zwiększyć moc wentylatora, aby zwiększyć jego wydajność dwa razy? Gęstość powietrza jest równa $\varrho = 1{,}3\ \mathrm{kg/m^3}$.
Rozwiązanie na str. 9