Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1997.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 231 (WT=1,00), 232 (WT=2,90) 233 (WT=2,54), 234 (WT=3,57) z numerów 1/1997 i 2/1997

Andrzej Idzik	– Bolesławiec	47,68
Przemysław Gadziński	– Środa Śl.	35,20
Jarosław Łazuka	– Warszawa	13,81
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	13,10

Mały region na zachód od Wrocławia zapełnia większą część naszej Ligowej czołówki. Gratulacje dla 23. członka Klubu Fizycznego – p. Idzika, któremu na uzbieranie **44** punktów wystarczyło niewiele ponad rok!

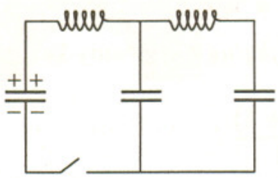
Termin nadsyłania rozwiązań:
30 XI 1997

Zadania z fizyki nr 242, 243

Redaguje Jerzy B. BROJAN

242. Prawidłowa regulacja układu kierowniczego w samochodzie wymaga, aby kąt skręcenia przednich kół był niejednakowy. Wyjaśnić przyczynę tej różnicy. Jeśli w dobrze wyregulowanym samochodzie przy skręceniu prawego przedniego koła w prawo o 20° lewe przednie koło skręca w prawo o 18°, to o jaki kąt skręca lewe koło przy skręceniu prawego w prawo o 40°?

243. Trzy jednakowe kondensatory i dwie jednakowe cewki połączono w obwód przedstawiony na rysunku. Początkowo lewy kondensator był naładowany do napięcia U, pozostałe dwa były nienaładowane, a prąd w żadnej części obwodu nie płynął. W jakich granicach będzie się zmieniać napięcie na każdym z kondensatorów po zamknięciu klucza? Opór obwodu pominąć.



Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 5/1997

Przypominamy treść zadań:

239. Na nici o długości 40 cm (długość w stanie nie napiętym) wisi ciężarek o masie 2 kg, do którego od dołu przywiązany jest luźny odcinek takiej samej nici o długości 30 cm. Z jaką prędkością powinien się przesuwać w dół ruchem jednostajnym dolny koniec tego odcinka, aby w następstwie jego napięcia
a) zerwaniu uległ tylko dolny odcinek nici,
b) zerwaniu uległy oba odcinki (gdy ciężarek znajdował się ponad końcem poruszającym się jednostajnie)?
Wytrzymałość nici wynosi 50 N, a maksymalna rozciągliwość – 8%, przy czym zakładamy, że wydłużenie jest proporcjonalne do siły napinającej aż do chwili zerwania.

240. Wysyłający światło punkt porusza się z prędkością v_1 i przecina oś optyczną soczewki pod kątem α_1, a w tym momencie obraz tego punktu przecina oś pod kątem α_2. Z jaką prędkością v_2 porusza się obraz?

239. Wprowadźmy oznaczenia: długość górnej nici l_1, masa ciężarka m, szukana prędkość v, wytrzymałość nici W, rozciągliwość r, długość dolnej nici l_2, przyspieszenie ziemskie g, stała sprężystości nici $k = W/(rl)$ (równa $k_1 = 1562$ N/m dla górnej nici i $k_2 = 2083$ N/m dla dolnej). Oznaczmy też przesunięcie ciężarka w stosunku do początkowego położenia równowagi przez $x(t)$, a chwili, kiedy dolna nić zaczyna się napinać, przypiszmy $t = 0$. Wydłużenie dolnej nici jest równe $vt - x(t)$, a dopóki obie nici są całe, równanie ruchu ciężarka ma postać

$$mx''(t) = k_2(vt - x(t)) - k_1 x(t)\,.$$

Przy warunkach początkowych $x(0) = x'(0) = 0$ rozwiązaniem jest

$$x(t) = \frac{vk_2}{k_1 + k_2}\left(t - \frac{1}{\omega}\sin\omega t\right),$$

gdzie $\omega = \sqrt{(k_1 + k_2)/m}$. W obu rozpatrywanych przypadkach a) i b) najpierw powinna ulec zerwaniu dolna nić. Nastąpi to w takiej chwili t_0, w której spełniony jest warunek $k_2(vt_0 - x(t_0)) = W$ (gdy jest kilka rozwiązań, należy wybrać najwcześniejsze), natomiast dla górnej nici napięcie powinno w tej chwili nie przekraczać dozwolonej wartości, tzn. $mg + k_1 x(t_0) < W$. Analiza numeryczna pozwala stwierdzić, że przy zadanych wartościach stałych nierówność ta będzie spełniona dla $v > 0{,}724$ m/s. (Można się też posłużyć w tym miejscu dość zawiłymi przekształceniami analitycznymi.) Po zerwaniu dolnej nici ciężarek porusza się ruchem harmonicznym z częstością $\omega_1 = \sqrt{k_1/m}$ i amplitudą $A = \sqrt{(x(t_0))^2 + (x'(t_0)/\omega_1)^2}$. Górna nić nie zerwie się, jeśli $mg + k_1 A < W$, a z analizy numerycznej otrzymujemy $v > 0{,}796$ m/s. Takie jest rozwiązanie punktu a), natomiast w przypadku b) prędkość v powinna zawierać się między 0,724 m/s a 0,796 m/s.

240. Różniczkując równanie soczewkowe

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{f}$$

wyznaczamy związek między małymi przesunięciami dx i dy (znaki pomijamy)

$$\frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \frac{\mathrm{d}y}{y^2}\,.$$

Z równania $h'/h = y/x$ (gdzie h i h' są bardzo małymi odległościami przedmiotu i obrazu od osi) mamy $\mathrm{d}h'/\mathrm{d}h = y/x$. Podstawiając $v_1\cos\alpha_1 = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$, $v_2\cos\alpha_2 = \mathrm{d}y/\mathrm{d}t$, $v_1\sin\alpha_1 = \mathrm{d}h/\mathrm{d}t$, $v_2\sin\alpha_2 = \mathrm{d}h'/\mathrm{d}t$ otrzymujemy

$$v_2 = v_1\frac{\sin^2\alpha_1\cos\alpha_2}{\sin^2\alpha_2\cos\alpha_1}\,.$$

Zadania z matematyki nr 345, 346

Redaguje Marcin E. KUCZMA

345. Liczby rzeczywiste a, b, c spełniają równanie
$$\frac{1}{bc-a^2}+\frac{1}{ca-b^2}+\frac{1}{ab-c^2}=0.$$
Dowieść, że
$$\frac{a}{(bc-a^2)^2}+\frac{b}{(ca-b^2)^2}+\frac{c}{(ab-c^2)^2}=0\,.$$

346. Rozważamy zdanie:

($*$) Każdy wielościan wypukły, który nie zawiera żadnego czworościanu o objętości 1, jest zawarty w pewnym czworościanie o objętości mniejszej niż V.

(a) Dowieść, że dla $V=27$ zdanie ($*$) jest prawdziwe.
(b) Czy zdanie ($*$) jest prawdziwe dla jakiejkolwiek liczby V mniejszej od 27?

Zadanie **346** jest wariacją na temat zadania **342** (proponowanego przez Czytelnika). Polecenie zadania **342** było równoważne następującemu: udowodnić stwierdzenie ($*$) dla $V=8$. Taka teza nie jest jednak prawdziwa. Zarówno rozwiązanie proponowane przez autora zadania, jak i rozwiązanie, które miał na uwadze redaktor ligi zadaniowej, jest poprawne tylko dla $V\geq 27$; liczba 8 pojawiła się w wyniku pomyłki – za którą, rzecz jasna, przepraszamy Czytelników.

Aby nie psuć uczestnikom ligi przyjemności zastanowienia się nad problemem, zamieszczamy to zadanie (a raczej: analogiczne zadanie) ponownie, w postaci polecenia (a) oraz pytania (b).

Przysłane przez uczestników ligi rozwiązania zadania **342**, zawierające dowody nieprawdziwości podanego w nim twierdzenia, będą uwzględnione w punktacji ligowej, w „kolejce ligowej 341/342". Zapewne niektóre z tych rozwiązań będą zawierały uwagi dające dowód tezy (a) oraz pełną lub częściową odpowiedź na pytanie (b). Takie uwagi (jeśli ich autorzy nie przyślą rozwiązania zadania **346**) będą ocenione i punktowane w „kolejce 345/346", w takiej mierze, w jakiej będą stanowić przyczynek do rozwiązania tego zadania.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 331 (WT=2,60), 332 (WT=1,80),
z numeru 12/1996

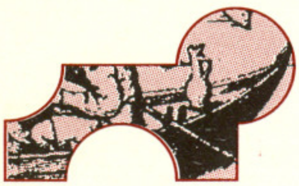
Krzysztof Zapisek – Warszawa 41,22
Jerzy Witkowski – Radlin 39,14
Jarosław Łazuka – Warszawa 37,78
Marcin Kasperski – Warszawa 36,77

Rozwiązania (?) zadań z matematyki z numeru 5/1997

Przypominamy treść zadań:

341. Na każdym polu szachownicy prostokątnej o wymiarach $m\times n$ leży kartonik pomalowany z jednej strony na żółto, a z drugiej na niebiesko. Wykonujemy serię ruchów. W każdym ruchu wybieramy jedno pole, po czym przewracamy na drugą stronę leżący na nim kartonik, a także wszystkie inne kartoniki znajdujące się w rzędzie poziomym i w rzędzie pionowym przechodzącym przez wybrane pole. W chwili początkowej cała szachownica jest żółta. Udowodnić, że stosując opisaną procedurę można doprowadzić do tego, by cała szachownica stała się niebieska oraz obliczyć minimalną liczbę ruchów, która jest do tego konieczna.

342. Zamiast treści i szkicu rozwiązania – komentarz do zadania **346**; patrz wyżej.



341. Przyjmijmy, że szachownica ma n rzędów poziomych (wierszy) i m rzędów pionowych (kolumn). Weźmy pod uwagę serię ruchów, opisanych w treści zadania. Pomalujmy każde pole szachownicy jednym z dwóch kolorów: czarnym, jeśli to pole zostało „wybrane" nieparzystą liczbę razy, a białym – jeśli parzystą. Żądany efekt zostanie uzyskany wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej pary numerów (i,j) $(1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq m)$ krzyż złożony z $(n+m-1)$ pól leżących w i-tym wierszu i j-tej kolumnie będzie zawierał nieparzystą liczbę czarnych pól. Pokolorowanie spełniające ten warunek będziemy nazywać „dobrym". Szukając algorytmu optymalnego czasowo można ograniczyć uwagę do takich ciągów ruchów, w których każde pole zostaje wybrane co najwyżej jeden raz; czas (liczba ruchów) jest wówczas równy liczbie czarnych pól.

Przypadek (1): liczby n i m są parzyste. Pokolorowanie wszystkich pól na czarno jest wtedy dobre. Wykażemy, że jest to jedyne dobre pokolorowanie. Przypuśćmy, że pewne pole (i_0,j_0) jest białe. Dla $i=1,\ldots,n$ oznaczmy przez k_i liczbę czarnych pól w i-tym wierszu bez pola (i,j_0). Niech l_{j_0} będzie liczbą czarnych pól w j_0-tej kolumnie. Krzyż wyznaczony przez pole (i,j_0) zawiera $k_i+l_{j_0}$ czarnych pól. Ma to być liczba nieparzysta (dla każdego i). Zatem liczby $k_1,\ldots,k_n$ są jednakowej parzystości, wobec czego ich suma jest liczbą parzystą. To znaczy, że k_{i_0} jest liczbą tej samej parzystości, co liczba $K=\sum\limits_{i\neq i_0}k_i$, czyli liczba czarnych pól w szachownicy z usuniętym krzyżem (i_0,j_0). Zamieniając w tym rozumowaniu role wierszy i kolumn wnosimy, że także l_{j_0} jest liczbą tej samej parzystości, co K. Otrzymujemy sprzeczność z warunkiem, że $k_{i_0}+l_{j_0}$ ma być liczbą nieparzystą. Tak więc pokolorowanie, w którym zostaje choć jedno pole białe, nie jest dobre.

Przypadek (2): liczby n i m są nieparzyste. Możemy przyjąć, że $n\leq m$. Pokolorowanie jednej kolumny na czarno, a całej reszty na biało, jest dobre. Z drugiej strony, w każdym wierszu musi być co najmniej jedno czarne pole. Zatem minimalna liczba czarnych pól w dobrym pokolorowaniu wynosi n. Odrzucając założenie, że $n\leq m$, dostajemy jako wynik liczbę $\min\{n,m\}$.

Przypadek (3): liczby n i m są różnej parzystości. Niech, na przykład, m będzie liczbą parzystą, n nieparzystą. Pokolorowanie jednej kolumny na czarno, a całej reszty na biało, jest dobre. Przypuśćmy, że istnieje dobre pokolorowanie, w którym jest mniej niż n czarnych pól (zatem $n>1$). Pewien wiersz jest wtedy w całości biały. Usuwamy go i otrzymujemy szachownicę $(n-1)\times m$. W myśl konkluzji przypadku (1) wszystkie jej pola muszą być czarne. Ale $(n-1)m\geq n$, wbrew przypuszczeniu, że liczba czarnych pól jest mniejsza od n. Szukane minimum wynosi więc n.

Zbieramy wyniki otrzymane w poszczególnych przypadkach i mamy odpowiedź: minimalna liczba ruchów dających wymagany efekt (czyli minimalna liczba czarnych pól w dobrym pokolorowaniu) jest równa mn, gdy liczby m, n są obie parzyste; w przeciwnym zaś razie jest równa najmniejszej liczbie nieparzystej w zbiorze $\{m,n\}$.