Funkcja zeta Riemanna, część I

Roman DWILEWICZ i Ján MINÁČ

1. „Dyskretne” i „ciągłe”. Niniejszy (dwuczęściowy) artykuł dotyczy funkcji zeta Riemanna i związanej z nią hipotezy Riemanna.

Według opinii autorów niniejszego szkicu znakomitym (dla ambitnych) wprowadzeniem do tematu jest książka Titchmarsha [T].

Literatura poświęcona funkcji zeta Riemanna jest olbrzymia: tysiące artykułów i dziesiątki monografii napisanych w ciągu przeszło dwustu lat!

Co najmniej od czasów wielkiego szwajcarskiego matematyka Leonharda Eulera (1707–1783) profesjonalnych matematyków i amatorów fascynował związek między pojęciami *ciągły* i *dyskretny*. Okazało się, że takie „dyskretne obiekty”, jak liczby naturalne czy liczby pierwsze, są związane z sumami nieskończonymi i całkami.

Symbol ζ jest literą alfabetu greckiego; nazywa się ją *zeta*.

Funkcja zeta Riemanna $\zeta = \zeta(s)$ jest tego wyrazistym przykładem. Choć może mniej znana niż np. tradycyjne funkcje trygonometryczne lub wykładnicze, jest jedną z najważniejszych funkcji w całej matematyce i gra dużą rolę nie tylko w analizie zespolonej czy teorii liczb, ale również w geometrii algebraicznej czy topologii algebraicznej. Powiązana z nią Hipoteza Riemanna (piszemy o niej w drugiej części artykułu) jest chyba najsławniejszym otwartym problemem współczesnej matematyki. Niestety, w tym krótkim artykule z konieczności skoncentrujemy się tylko na niektórych własnościach funkcji ζ. Zainteresowanych Czytelników odsyłamy do cytowanych podstawowych monografii [E], [R], [T], oraz bardziej od strony historycznej – [W].

2. Co to jest funkcja zeta Riemanna? Na początek rozważmy bardzo naturalny szereg, mianowicie sumę odwrotności liczb naturalnych $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Jest to tzw. szereg harmoniczny i zapewne Czytelnik wie, że jest on rozbieżny. Przypatrzmy się więc innym, podobnym szeregom postaci $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$, czy bardziej ogólnie, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$, gdzie x jest liczbą rzeczywistą. Okazuje się, że ten ostatni szereg jest zbieżny dla $x > 1$ i rozbieżny dla $x \leq 1$.

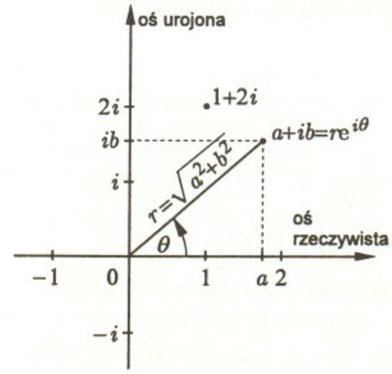
Elementarne dowody tego faktu można znaleźć w *Delcie* 11/1996, w artykule T. Krasińskiego, oraz w tym numerze, w artykule P. Rybki o mostach z klocków i w zadaniach „z myszką” (str. 11).

Czytelnik, który zna liczby zespolone, może zauważyć, że w powyższym szeregu można wziąć zamiast rzeczywistych x argumenty zespolone s. Pomijając na razie pytanie, dla jakich s szereg jest zbieżny, zdefiniujemy

$$(1) \qquad \zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s}.$$

Funkcja ta nazywa się *funkcją zeta Riemanna*. Pierwszym autorem istotnych rezultatów o funkcji ζ (szczególnie dla argumentów rzeczywistych) był Euler, który żył około stu lat przed Riemannem (niemiecki matematyk Georg Friedrich Bernhard Riemann, 1826–1866). Jednak to właśnie Riemann wskazał na znaczenie tej funkcji jako funkcji zmiennej zespolonej oraz udowodnił jej podstawowe własności. Dlatego funkcja ζ nazwana została jego imieniem.

Poniżej podajemy krótkie wprowadzenie do liczb zespolonych, w szczególności tłumaczymy, jak należy rozumieć potęgę zespoloną liczby naturalnej, co będzie nam potrzebne do zrozumienia szeregu w (1).

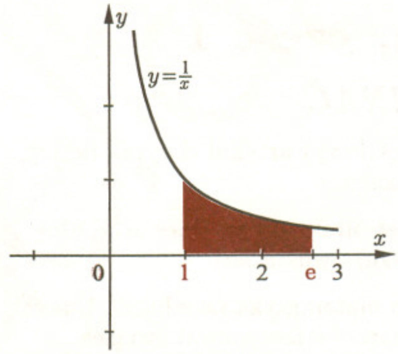


Rys. 1

Liczbę zespoloną s można utożsamiać z parą liczb rzeczywistych (a, b). Dodajemy takie pary „po współrzędnych”. Wprowadzając tzw. jednostkę urojoną i, o własności $i^2 = -1$, możemy zapisać $s = a + ib$. Liczbę a nazywamy częścią rzeczywistą s i zapisujemy $a = \operatorname{Re} s$ (od łac. *Realis*), liczbę b zaś – częścią urojoną, $b = \operatorname{Im} s$ (skrót od łac. *Imaginarius*). Zapis $s = a + ib$ ma również tę zaletę, że możemy mnożyć dwie liczby zespolone tak jak wielomiany zmiennej i, pamiętając tylko, że $i^2 = -1$:

$$(a + ib)(c + id) = ac + iad + ibc + i^2bd = ac - bd + i(ad + bc).$$

Liczbę zespoloną s możemy też przedstawić we współrzędnych biegunowych, pisząc $s = r(\cos\theta + i\sin\theta)$. Cosinus i sinus są tutaj te same, co w szkole, $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, a θ jest kątem skierowanym, mierzonym w radianach, między osią rzeczywistą a promieniem łączącym punkt 0 z punktem (a, b) (patrz rys. 1). Liczbę r nazywa się *wartością bezwzględną* (modułem) s i oznacza się $|s|$.



Rys. 2. Liczba e jest taka, że pole kolorowego obszaru jest równe 1. Inne definicje liczby e:

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}.$$

Zbiór liczb zespolonych można więc utożsamiać z płaszczyzną $\mathbf{R}^2$. Ponieważ możemy również mnożyć punkty tej specjalnej płaszczyzny, więc zbiór liczb zespolonych możemy traktować jako ciało; tradycyjnie oznacza się go literą $\mathbf{C}$ (od „complex" po angielsku czy „complexe" po francusku). Dla wyjaśnienia, co to jest zespolona potęga liczby naturalnej (tylko ten przypadek będzie nam potrzebny), podamy wzór, który też pochodzi od Eulera:

$$\mathrm{e}^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta\,.$$

Dla celów tego artykułu przyjmiemy ów wzór za definicję wyrażenia $\mathrm{e}^{i\theta}$. Z definicji wartości bezwzględnej otrzymamy $|\mathrm{e}^{i\theta}| = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.

Teraz jest już jeden krok do zrozumienia n^s, gdzie $n = 1, 2, \ldots$, a s jest liczbą zespoloną. Na przykład, co to jest 2^i? Ponieważ dla $a > 0$ mamy $a = \mathrm{e}^{\ln a}$, więc

$$2^i = \left(\mathrm{e}^{\ln 2}\right)^i = \mathrm{e}^{i\ln 2} = \cos(\ln 2) + i\sin(\ln 2)\,.$$

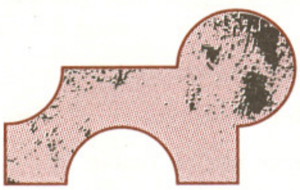
Ogólniej,

$$n^s = n^{a+ib} = n^a\, n^{ib} = n^a(\mathrm{e}^{\ln n})^{ib} = n^a \mathrm{e}^{ib\ln n} = n^a[\cos(b\ln n) + i\sin(b\ln n)]\,,$$

a wartość bezwzględna tego wyrażenia to liczba

$$|n^s| = n^a\sqrt{\cos^2(b\ln n) + \sin^2(b\ln n)} = n^a, \quad \text{gdzie} \quad a = \operatorname{Re} s\,.$$

Wróćmy do funkcji ζ. Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/|n^s| = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^a$ jest zbieżny dla $a = \operatorname{Re} s > 1$, co pociąga za sobą zbieżność szeregu w (1). Okazuje się, że szereg (1) jest zbieżny tylko dla takich s; nie znaczy to jednak, że funkcja ζ może być zdefiniowana tylko w półpłaszczyźnie $\operatorname{Re} s > 1$.



3. Liczby pierwsze i funkcja zeta. Inna równoważna definicja funkcji $\zeta(s)$ jest następująca:

$$(2) \qquad \zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} = \left(1 - \frac{1}{2^s}\right)^{-1}\left(1 - \frac{1}{3^s}\right)^{-1}\left(1 - \frac{1}{5^s}\right)^{-1}\ldots\,,$$

gdzie iloczyn jest po wszystkich liczbach pierwszych. Można udowodnić, że iloczyn ten też jest zbieżny dla $\operatorname{Re} s > 1$.

Żeby sprawdzić równoważność definicji (1) i (2), zauważmy, że każdy czynnik w iloczynie jest sumą szeregu geometrycznego,

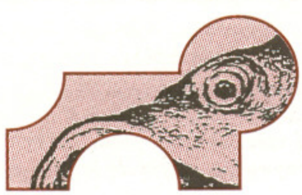
$$\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} = 1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \ldots\,.$$

Biorąc ich iloczyn po liczbach pierwszych nie przekraczających N, tzn. gdy $p = 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots, P \le N$, otrzymamy

$$\begin{aligned}\prod_{p\le N}\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} &= \left(1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{2^{2s}} + \ldots\right)\cdot\ldots\cdot\left(1 + \frac{1}{P^s} + \frac{1}{P^{2s}} + \ldots\right) = \\ &= 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{2^{2s}} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{2^s 3^s} + \ldots = \\ &= 1 + \frac{1}{2^s} + \ldots + \frac{1}{N^s} + \text{reszta}\,,\end{aligned}$$

gdzie „reszta" jest sumą nieskończoną zawierającą s-te potęgi tylko niektórych liczb naturalnych większych od N. Tutaj wykorzystujemy fakt, że każda liczba naturalna $n > 1$ może być zapisana w sposób jednoznaczny (z dokładnością do porządku mnożenia) jako iloczyn potęg liczb pierwszych. Jeśli $\zeta(s)$ jest zdefiniowana wzorem (1), otrzymamy

$$\begin{aligned}\left|\zeta(s) - \prod_{p\le N}\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}\right| &= \left|\zeta(s) - \frac{1}{1^s} - \frac{1}{2^s} - \ldots - \frac{1}{N^s} - \text{reszta}\right| \le \\ &\le \frac{1}{(N+1)^a} + \frac{1}{(N+2)^a} + \ldots, \qquad a = \operatorname{Re} s\,.\end{aligned}$$



Dla $a > 1$ ostatnia suma po prawej stronie dąży do 0, przy $N \to \infty$.

Iloczyn w (2) jest nazywany iloczynem Eulera i to Euler pierwszy udowodnił, że określa on tę samą funkcję co szereg (1). Z przedstawienia funkcji $\zeta(s)$ w formie (2) widać, że funkcja ta nie zeruje się dla $\operatorname{Re} s > 1$, ponieważ wszystkie czynniki są niezerowe, a iloczyn jest zbieżny.

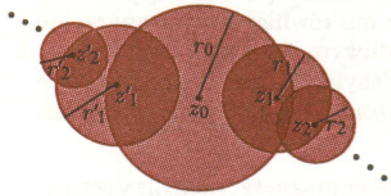
Definicja pochodnej w sensie zespolonym wygląda identycznie jak w przypadku rzeczywistym: jeśli funkcja f jest zdefiniowana w pewnym otoczeniu punktu z_0, wówczas $f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$. Jednak warunek istnienia pochodnej w sensie zespolonym jest warunkiem nieporównanie silniejszym. Bierze się to stąd, że dopuszczamy argumenty zespolone, tzn. zmienna z może poruszać się nie tylko po linii prostej, lecz także po płaszczyźnie $\mathbf{C}$ w otoczeniu z_0.

4. Funkcja zeta jako funkcja analityczna. Funkcja $\zeta(s)$ jest przykładem *funkcji analitycznej zespolonej* (lub inaczej *holomorficznej*), tzn. ma pochodną w sensie zespolonym w każdym punkcie swojej dziedziny.

Jedną z konsekwencji analityczności funkcji jest istnienie pochodnych wszystkich rzędów, choć w definicji zakładamy istnienie tylko pierwszej pochodnej! Ponadto, jeśli $f = f(z)$ jest funkcją analityczną zespoloną w zbiorze otwartym $U \subset \mathbf{C}$, to można udowodnić, że w otoczeniu każdego punktu $z_0 \in U$ funkcja f może być przedstawiona jako suma szeregu potęgowego o środku w punkcie z_0:

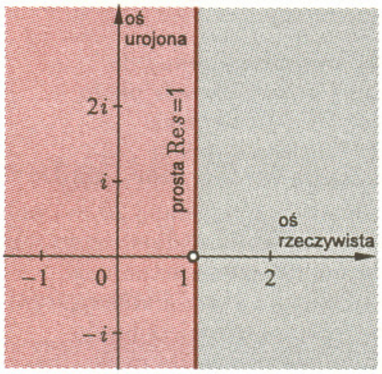
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad \text{gdzie } a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) \quad (f^{(n)} \text{ jest } n\text{-tą pochodną } f).$$

Powyższy szereg potęgowy jest zbieżny w kole otwartym o środku w z_0 i promieniu r_0, tzn. w $K(z_0, r_0) = \{z \in \mathbf{C} : |z - z_0| < r_0\}$ i rozbieżny dla $\{z \in \mathbf{C} : |z - z_0| > r_0\}$ dla pewnego $0 < r_0 \le \infty$. Na brzegu tego koła może być różnie ze zbieżnością.



Rys. 3

Teraz postaramy się wyjaśnić, jak należy rozumieć *przedłużenie analityczne funkcji f*. Bierzemy dowolny punkt $z_1 \in K(z_0, r_0)$ i znów rozwijamy funkcję f w szereg potęgowy, ale tym razem o środku w z_1. Ten nowy szereg jest zbieżny w pewnym kole $K(z_1, r_1)$ i rozbieżny poza domknięciem tego koła. Koło to może być zawarte w $K(z_0, r_0)$, ale nie musi. Jeśli nie jest zawarte, to funkcja f jest analityczna na sumie obu kół. Dalej bierzemy dowolny punkt $z_2 \in K(z_1, r_1)$, powtarzamy całą procedurę i kontynuujemy ją (patrz rys. 3). Funkcja f może być przedłużona na sumę tego ciągu kół. Identycznie możemy skonstruować inne ciągi kół, startując zawsze z koła $K(z_0, r_0)$. W ten sposób otrzymamy maksymalny zbiór, na którym funkcja analityczna zespolona jest zdefiniowana i poza który nie można jej przedłużyć analitycznie.



Rys. 4. Dla punktów szarej półpłaszczyzny wzory (1) i (2) dla funkcji $\zeta(s)$ mają sens. Można ją przedłużyć holomorficznie również na kolorową półpłaszczyznę (wraz z prostą $\mathrm{Re}\, s = 1$, $s \neq 1$). W ten sposób jedynym punktem, w którym funkcja ζ nie jest określona, pozostaje (1,0).

Okazuje się, że funkcja $\zeta(s)$, choć wzorem (1) czy (2) jest zdefiniowana tylko dla $\mathrm{Re}\, s > 1$, może być analitycznie przedłużona na całą płaszczyznę zespoloną $\mathbf{C}$ oprócz punktu 1 (patrz rys. 4). Jest to własność mniej oczywista, choć nie jest trudno ją udowodnić.

Łatwo jest udowodnić, że funkcja zeta może być przedłużona na półpłaszczyznę $\mathrm{Re}\, s > 0$, to znaczy na prawo od osi urojonej. Mianowicie, mnożąc $1 - 2^{1-s}$ przez $\zeta(s)$ otrzymamy

$$\begin{aligned}
(1 - 2^{1-s})\zeta(s) &= \left(1 - \frac{2}{2^s}\right)\left(\frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \ldots\right) = \\
&= \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \ldots + \frac{1}{n^s} + \ldots - 2\left(\frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \ldots + \frac{1}{(2n)^s} + \ldots\right) = \\
&= \frac{1}{1^s} - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n^s} + \ldots = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}.
\end{aligned}$$

Szereg po prawej stronie jest zbieżny dla $\mathrm{Re}\, s > 0$. Zatem funkcja $\zeta(s)$ może być przedstawiona wzorem

$$\zeta(s) = \frac{1}{1 - 2^{1-s}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s},$$

gdzie prawa strona ma sens dla $\mathrm{Re}\, s > 0$ oprócz $s = 1$. Na przykład,

$$\zeta(\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{1 - \sqrt{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}.$$

W drugiej części tego artykułu będziemy więc zakładać, że funkcja $\zeta = \zeta(s)$ jest analityczna dla wszystkich s zespolonych oprócz 1, choć wzory (1) i (2) mają jedynie sens dla $\mathrm{Re}\, s > 1$.

Autorzy pragną podziękować dr. R. Kopieckiemu, prof. A. Schinzlowi i prof. J. Urbanowiczowi za cenne uwagi, które istotnie ulepszyły pierwszą wersję obu części niniejszego artykułu.

Literatura.

[E] M. Edwards, *Riemann's Zeta Function*. Academic Press 1974.

[R] P. Ribenboim, *The New Book of Prime Number Records*. Springer-Verlag, New York 1996.

[T] E. C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta Function*. Clarendon Press, Oxford, 1986 (wydanie drugie).

[W] A. Weil, *Number Theory. An Approach Through History. From Hammurabi to Legendre*. Birkhäuser 1984.