Przy okazji artykułu Kazimierza Szymiczka

Twierdzenie Waringa

W latach 70. XVIII wieku Edward Waring wysunął hipotezę, której szczególnym przypadkiem jest twierdzenie Lagrange'a, mówiące o tym, że każda liczba naturalna jest sumą czterech kwadratów liczb naturalnych. Hipoteza ta orzekała, że
dla dowolnego naturalnego wykładnika $k \geq 1$ istnieje liczba naturalna m o tej własności, że każda liczba naturalna jest sumą k-tych potęg m liczb całkowitych nieujemnych.
Twierdzenie Lagrange'a orzeka zatem, że dla $k = 2$ hipoteza Waringa jest prawdziwa – stosowną liczbą jest $m = 4$.

Od 1909 roku wiemy, że hipoteza Waringa jest twierdzeniem – udowodnił to David Hilbert. Nie jesteśmy jednak pewni, czy znamy wzór pozwalający dla każdego k obliczyć najmniejszą wartość m. Wiadomo bowiem już od dawna, że

$$m \geq 2^k + \left[\left(\frac{3}{2}\right)^k\right] - 2.$$

Łatwo to uzasadnić. Weźmy pod uwagę liczbę $[(\frac{3}{2})^k] \cdot 2^k - 1$. Jest ona mniejsza od 3^k, więc w jej przedstawieniu jako sumy k-tych potęg występują tylko potęgi dwójki i jedynki.

Ponieważ

$$\left[\left(\frac{3}{2}\right)^k\right] \cdot 2^k - 1 = 2^k \cdot \left(\left[\left(\frac{3}{2}\right)^k\right] - 1\right) + \left(2^k - 1\right),$$

więc do jej uzyskania jako sumy k-tych potęg potrzeba tyle razy napisać 2^k, ile wynosi pierwszy nawias, i tyle razy 1, ile wynosi drugi, co kończy uzasadnienie podanego oszacowania.

We wszystkich przeliczonych przypadkach można w tym oszacowaniu zastąpić nierówność przez równość. Tak więc liczba trzecich potęg potrzebna do uzyskania dowolnej liczby naturalnej to 9 (to maksimum realizuje np. 23), liczba czwartych potęg to 19 (np. 79) itd. aż do $k = 471\,600\,000$. Ale czy równość zachodzi dla każdego k? W 1957 roku Kurt Mahler wykazał, że istnieje taka liczba K, że dla wszystkich $k > K$ w oszacowaniu jest równość.

Tak więc dla Was, Czytelnicy, pozostało jedynie odpowiedzieć na nierozstrzygnięte do tej pory pytanie, czy K jest mniejsze od 471 600 000 – co zamykałoby problem – czy też nie. Powodzenia.

Jak to zostało wymyślone?

Stwierdzenie, że
jeśli p i q są sumami dwóch kwadratów [liczb całkowitych], *to $p \cdot q$ też można przedstawić jako sumę dwóch kwadratów* [liczb całkowitych] *i to dwoma sposobami,*
można znaleźć już w pracach Diofantosa, żyjącego w III wieku. Oczywiście, nie jest to prawda – czasami oba sposoby okazują się jednakowe.

Te dwa sposoby to

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 = \\ = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2.$$

Dziś, gdy znamy liczby zespolone, wiemy, że jest to prawda nie tylko dla liczb całkowitych, i wynika z przemienności mnożenia liczb zespolonych. Mamy bowiem

$$(z_1)^2 \cdot (z_2)^2 = (z_1 \cdot z_2)^2,$$

skąd wynika

$$|z_1|^2 \cdot |z_2|^2 = |z_1 \cdot z_2|^2.$$

Podstawiając $z_1 = a + ib$, $z_2 = c + id$ otrzymujemy pierwszy sposób, natomiast $z_1 = a + ib$, $z_2 = d + ic$ daje nam drugi sposób.

No dobrze, ale jak odkrył tę prawidłowość Diofantos? Przecież nie znał liczb zespolonych.

Odpowiedź, że wystarczy rozwinąć lewą i prawą stronę i okaże się, że jest dobrze, jest nie na temat. Do tego bowiem, aby te strony rozwijać, trzeba je mieć, czyli jakimś sposobem wpaść na pomysł takiej równości. Tymczasem sam Diofantos nie zostawił nam w tej kwestii żadnych wskazówek.

Być może zrobił to tak:

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 = \\ = (a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2) + (a^2d^2 + 2abcd + b^2c^2) = \\ = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2\,.$$

Diofantos jest postacią tajemniczą nie tylko dlatego, że nie znamy żadnych szczegółów jego biografii. Sposób pisania przez niego prac przypomina czasy Babilonu czy Średniego Państwa Egipskiego, które to czasy już dla Diofantosa były odległe o 2 tysiące lat. Pisał wprawdzie po grecku, ale to taka sama wskazówka, jaką dziś stanowiłoby stwierdzenie, że ktoś pisze swe prace po angielsku.

Wygląda więc na to, że ciekawość na temat *jak on na to wpadł* możemy zaspokajać jedynie sami zręcznie na to wpadając.

Marek KORDOS