# Klub 44

## Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

### Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru $n$ w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie $S$ oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a $N$ – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1997.

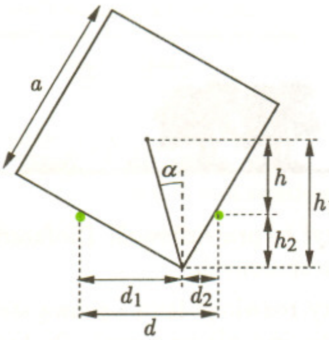
*Redaguje Jerzy B. BROJAN*

## Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 4/1997

### Przypominamy treść zadań:

**237.** Jednorodny sześcian o boku $a$ położono na dwóch cienkich, równoległych i poziomych prętach odległych o $d$ (rys.). Tarcie między sześcianem a prętami nie występuje.
a) Jaki warunek muszą spełniać $a$ i $d$, aby dla $\alpha = 0$ równowaga była trwała, tzn. aby po małym przechyle następował powrót do tego położenia?
b) Jaki warunek muszą spełniać $a$ i $d$, aby sześcian mógł spoczywać na prętach w równowadze dla pewnego kąta $\alpha$ różnego od zera? Czy ten stan równowagi będzie trwały?

**238.** Dwa pierwiastki w temperaturze pokojowej występują w stanie gazowym, przy czym jeden jest gazem jednoatomowym, a drugi – dwuatomowym. Okazuje się, że zderzenia atomów (lub cząsteczek) pierwiastka $A$ są sprężyste (suma energii kinetycznych przed zderzeniem jest równa tej sumie po zderzeniu), natomiast dla pierwiastka $B$ często są niesprężyste. Który z pierwiastków $A$ i $B$ jest gazem jednoatomowym, a który dwuatomowym, i dlaczego?
Po silnym oziębieniu gazów okazało się, że zderzenia obu rodzajów cząsteczek mają taki sam charakter. Czy są one wtedy sprężyste, czy niesprężyste, i dlaczego?
Po silnym podgrzaniu gazów okazało się, że zderzenia obu rodzajów cząsteczek także mają taki sam charakter. Czy są one wtedy sprężyste, czy niesprężyste, i dlaczego?
Zachowując temperaturę początkową zmieszano gazy. Czy zderzenia cząsteczek jednego gazu z atomami drugiego są sprężyste?




**237.** Oznaczmy różnicę wysokości środka sześcianu i prętów przez $h$. Jest ona dana wzorem $h = h_1 - h_2$ (zob. rys.), przy czym $h_1 = (a/\sqrt{2})\cos\alpha$. Aby wyznaczyć $h_2$, podzielmy $d$ na części $d_1$ i $d_2$ i rozwiążmy układ równań

$$d = d_1 + d_2\,, \qquad h_2 = d_1 \operatorname{tg}(45^\circ - \alpha) = d_2 \operatorname{tg}(45^\circ + \alpha)\,.$$

Po przekształceniach otrzymujemy $h_2 = (d/2)\cos 2\alpha$. Zatem

$$h = (a/\sqrt{2})\cos\alpha - (d/2)\cos 2\alpha = -du^2 + (a/\sqrt{2})u + (d/2)\,,$$

gdzie $u = \cos\alpha$. Widzimy, że $h(u)$ jest funkcją kwadratową osiągającą maksimum dla $u = a/2d\sqrt{2}$. Ponieważ fizycznie interesujący jest tylko przedział $0^\circ \le \alpha < 45^\circ$ $(1 \ge u > 1/\sqrt{2})$, więc wnioskujemy, że:
a) równowaga w położeniu $\alpha = 0$ jest trwała dla $a < 2d\sqrt{2}$ i nietrwała dla $a \ge 2d\sqrt{2}$ (oczywiście, aby sześcian zatrzymał się na prętach, musi być spełniony warunek $a\sqrt{2} > d$),
b) jeśli $2d \le a < 2d\sqrt{2}$, to dla kąta $\alpha$ danego wzorem $\cos\alpha = a/2d\sqrt{2}$ występuje dodatkowe położenie równowagi nietrwałej.

**238.** Zderzenia są niesprężyste wtedy, gdy energia kinetyczna przechodzi w energię drgań cząsteczek lub na odwrót. Zatem pierwiastek $A$ jest gazem jednoatomowym, a pierwiastek $B$ – dwuatomowym.

W niskich temperaturach drgania cząsteczek ulegają „zamrożeniu" (energia kinetyczna jest za mała, aby je wzbudzić), zatem dla obu gazów zderzenia będą sprężyste.

W wysokich temperaturach energia kinetyczna będzie wystarczająca do wzbudzenia stanów elektronowych (przejścia elektronów na inną orbitę), a więc dla obu gazów zderzenia będą niesprężyste.

Podczas zderzeń atomów $A$ z cząsteczkami $B$ cząsteczki mogą zostać pobudzone do drgań, czyli zderzenia będą niesprężyste.

W charakterze uzupełnienia podajemy za *Encyklopedią Fizyki* wartości typowych energii:
poziomy elektronowe – kilka eV,
poziomy oscylacyjne (związane z drganiami cząsteczek) od 0,1 do 0,001 eV,
poziomy rotacyjne (związane z obrotami cząsteczek) od $10^{-3}$ do $10^{-5}$ eV.

Ponieważ średnia energia termiczna w temperaturze $T$ jest rzędu k$T$, gdzie k $\approx 10^{-4}$eV/K jest stałą Boltzmanna, więc widzimy, że – zależnie od dokładniejszej wartości energii drgań cząsteczki – możliwe jest „zamrożenie" tych drgań poprzez obniżenie temperatury. Wzbudzenie poziomów elektronowych będzie natomiast wymagało podwyższenia temperatury do kilkudziesięciu tysięcy kelwinów.

Poziomów rotacyjnych możemy nie brać pod uwagę ze względu na bardzo małą wartość ich energii (niesprężystość zderzeń może być niezauważalna). Można też przyjąć, że energia kinetyczna cząsteczek obejmuje energię ich ruchu obrotowego – przy takiej interpretacji zderzenia ze wzbudzeniem poziomów rotacyjnych uznalibyśmy za sprężyste.

$$\sqrt[\otimes]{\oint!}=44$$

*Redaguje Marcin E. KUCZMA*

## Rozwiązania zadań z matemetyki z numeru 4/1997

Przypominamy treść zadań:

**339.** Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Punkty $P$ i $Q$ leżą odpowiednio na półprostych $AB^{\rightarrow}$ i $AD^{\rightarrow}$, przy czym $|AP| = |CD|$, $|AQ| = |BC|$. Wykazać, że środek odcinka $PQ$ leży na prostej $AC$.

**340.** Dowieść, że dla liczb nieujemnych $a$, $b$, $c$ zachodzi nierówność

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a+b+c}{3}+\sqrt[3]{abc}\right) \geq \frac{1}{3}\left(\sqrt{bc}+\sqrt{ca}+\sqrt{ab}\right).$$

**339.** Niech $R$ będzie punktem symetrycznym do $P$ względem $A$. Mamy równości:

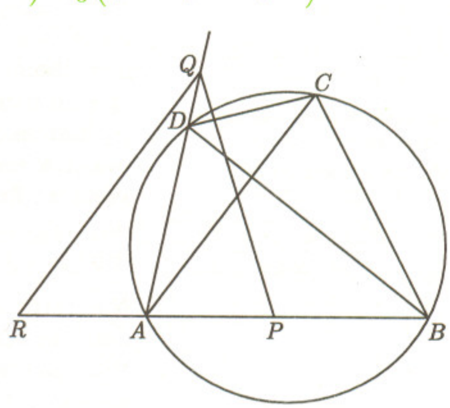
$$|QA| = |BC|, \qquad |AR| = |AP| = |CD|,$$

$$|\angle QAR| = 180° - |\angle QAB| = |\angle BCD|;$$

wynika z nich, że trójkąt $QAR$ przystaje do trójkąta $BCD$, i wobec tego

$$|\angle ARQ| = |\angle CDB| = |\angle BAC|.$$

To znaczy, że prosta $RQ$ jest równoległa do $AC$. Prosta $AC$ połowi odcinek $PR$, więc na mocy twierdzenia Talesa połowi także odcinek $PQ$. Stąd teza.




Czołówka ligi zadaniowej
**Klub 44 M**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 331 ($WT$=2,60), 332 ($WT$=1,80), z numeru 12/1996

| | | |
|---|---|---|
| Piotr Żmijewski | – Łódź | 45,42 |
| Bartłomiej Dyda | – Wrocław | 44,40 |
| Krzysztof Zapisek | – Warszawa | 41,22 |
| Jarosław Łazuka | – Warszawa | 37,78 |
| Jerzy Witkowski | – Radlin | 37,03 |

Witamy w Klubie dwóch nowych członków: panów Żmijewskiego oraz Dydę (numery 81 i 82 w Klubie **44M**)

**340.** Nie tracąc ogólności przyjmijmy, że $a \geq b \geq c \geq 0$. Gdy $c = 0$, nierówność dana do udowodnienia sprowadza się do nierówności między średnią arytmetyczną i średnią geometryczną liczb $a$, $b$. Dalej zakładajmy więc, że $c > 0$. Oznaczmy: $a/c = x^2$, $b/c = y^2$; wówczas $x \geq y \geq 1$, a dowodzona nierówność, pomnożona stronami przez $6/c$, przybiera postać:

$$x^2 + y^2 + 1 + 3(xy)^{2/3} \geq 2y + 2x + 2xy.$$

Przenosimy wszystko na lewą stronę i przekształcamy otrzymaną różnicę, wprowadzając w pewnym momencie oznaczenie $q = (xy)^{1/6}$:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2xy - 2x - 2y + 1 + 3(xy)^{2/3} &= \\ = (x-y)^2 - 2(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 - 4\sqrt{xy} + 1 + 3(xy)^{2/3} &= \\ = (\sqrt{x}-\sqrt{y})^2[(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2 - 2] - 4q^3 + 1 + 3q^4 &\geq \\ \geq 3q^4 - 4q^3 + 1 = (q-1)^2(3q^2+2q+1) &\geq 0. \end{aligned}$$

**Rozwiązanie zadania M 816.** Oznaczmy $f(x) = \dfrac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}$. Wówczas odwrotność liczby $f(x)$ to $\dfrac{x-\sqrt{x^2-4}}{2}$, więc

$$W_b(x)^2 - 4 = (f(x)^b + f(x)^{-b})^2 - 4 = (f(x)^b - f(x)^{-b})^2.$$

Zatem,

$$W_a(W_b(x)) = \left(\frac{W_b(x)+\sqrt{W_b(x)^2-4}}{2}\right)^a + \left(\frac{W_b(x)-\sqrt{W_b(x)^2-4}}{2}\right)^a =$$

$$= \left(\frac{f(x)^b + f(x)^{-b} + (f(x)^b - f(x)^{-b})}{2}\right)^a + \left(\frac{f(x)^b + f(x)^{-b} - (f(x)^b - f(x)^{-b})}{2}\right)^a =$$

$$= f(x)^{ab} + f(x)^{-ab} = W_{ab}(x).$$

Łatwo sprawdzić, że $W_3(x) = x^3 - 3x$. Dla

$$x_0 = W_{1/3}(3) = \sqrt[3]{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$$

mamy $x_0^3 - 3x_0 = W_3(x_0) = W_3(W_{1/3}(3)) = W_1(3) = 3$.

**Uwaga:** Każde nietrywialne równanie sześcienne daje się przez proste podstawienie typu $x = ay + b$ sprowadzić do równania postaci $y^3 - 3y = c$, co umożliwia zastosowanie powyższej metody.