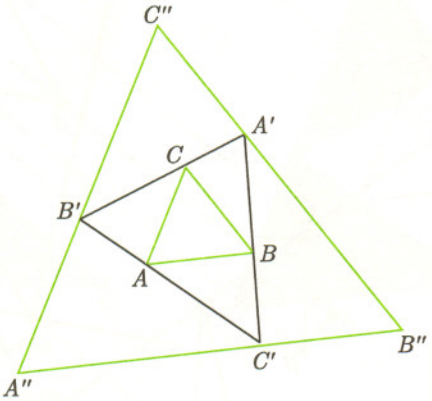
Historia pewnej matury

Rafał KOŁODZIEJ

Pewnego razu w pewnej szkole pewien uczeń pisał pracę maturalną z matematyki. Ponieważ nie rozwiązał żadnego zadania, wydawać by się mogło, że maturę obleje. Na szczęście w brudnopisie znalazł się szkic rozwiązania zadania z geometrii. Trudno było go ocenić, gdyż opierał się na twierdzeniu, którego nie znał ani nauczyciel, ani jego bliżsi i dalsi znajomi.

Twierdzenie 1.
Na trójkącie ABC opiszmy trójkąt $A'B'C'$, a na nim z kolei taki trójkąt $A''B''C''$ (kolejność wierzchołków jak na rys. 1), aby odpowiednie boki trójkąta $A''B''C''$ były równoległe do boków trójkąta ABC. Wówczas zachodzi równość

$$\frac{CA'}{CB'} = \frac{C'B''}{C'A''}.$$

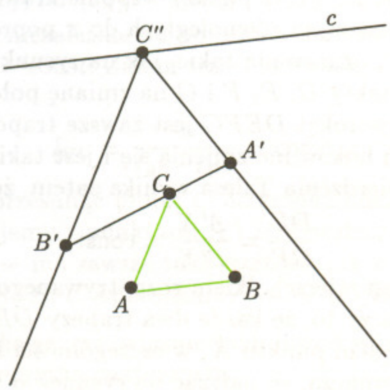


Rys. 1

Ponieważ od prawdziwości postawionej przez ucznia hipotezy zależała zarówno jego przyszłość, jak i reputacja nauczyciela – znalazł się i dowód, a właściwie dowody: analityczne, oparte na uciążliwych rachunkach. Trudno jednak przypuszczać, aby intuicja maturzysty postępowała mozolną drogą wskazaną przez Kartezjusza:

- punkt to para liczb,
- prosta to równanie liniowe,
- punkt wspólny dwu prostych to rozwiązanie układu równań liniowych, itd.

Ponieważ twierdzenia nie znalazłem w literaturze, z drugiej zaś strony syntetyczne sformułowanie obiecywało eleganckie rozwiązanie, postarałem się twierdzenie „zobaczyć". Okazuje się, że łatwiej je zrozumieć, traktując rysunek 1 jako płaski cień pewnych obiektów leżących w przestrzeni trójwymiarowej.



Rys. 2

Supernowa z 1054 roku

Barbara MOCHEJSKA

Wybuch gwiazdy supernowej jest jednym z najbardziej spektakularnych zjawisk obserwowanych na niebie. W miejscu, w którym przedtem nie dostrzegano żadnego obiektu, pojawia się niespodziewanie „nowa", bardzo jasna gwiazda, która może być widoczna nawet w dzień. Stopniowo gwiazda traci na jasności, aby po kilku latach z powrotem stać się niewidoczna.

Podczas ostatnich dwóch tysięcy lat pojawienie się supernowych zostało zauważone i odnotowane kilkakrotnie. Na podstawie pozostałości, którym to mianem określa się mgławice powstałe w wyniku wybuchu gwiazdy, potwierdzono sześć takich eksplozji, w latach 185, 393, 1006, 1054, 1572 i 1604. Supernowa z 1572 r. została opisana przez Tychona Brahego. Jemu zawdzięczamy pomiary jej położenia i krzywą zmian blasku. Ostatnia supernowa, obserwowana między innymi przez Keplera, wybuchła na kilka lat przed wynalezieniem teleskopu. Od tego czasu nie obserwowano już żadnej supernowej w naszej Galaktyce – supernowa z 1987 r., widoczna doskonale gołym okiem, wybuchła wprawdzie blisko, ale jednak poza Galaktyką, w Wielkim Obłoku Magellana.

Skoro z odległości międzygalaktycznych supernowa może być widoczna gołym okiem, to łatwo się domyśleć, że jej jasność musi być niezwykła. Rzeczywiście, jasność gwiazdy po wybuchu wzrasta gwałtownie o kilkanaście wielkości gwiazdowych i osiąga wartość setek milionów jasności Słońca. Moc promieniowania takiej gwiazdy jest więc porównywalna z mocą całej przeciętnej galaktyki, składającej się z wielu miliardów gwiazd. Oczywiście, supernowa nie jest w stanie długo świecić tak intensywnie i – jak wspomnieliśmy – po kilku tygodniach wyraźnie słabnie, a po kilku latach staje się niewidoczna gołym okiem.

4 lipca 1054 r. w gwiazdozbiorze Byka w pobliżu ζ Tauri pojawiła się nowa gwiazda. Na podstawie chińskich kronik

wiemy, że była widoczna w dzień przez 23 dni, a dopiero po 653 dniach zniknęła z nocnego nieba. Potwierdzają to zdarzenie kroniki japońskie i arabskie. Niestety, nie znaleziono żadnych informacji europejskich na ten temat. Natomiast w północnej Arizonie, na terenach zamieszkanych w XI–XIII w. przez Indian, odnaleziono dwa rysunki przedstawiające sierp Księżyca i jasną gwiazdę tuż pod nim. Przypuszcza się, że tą gwiazdą jest supernowa widziana rankiem 5 lipca 1054 r., gdyż Księżyc w takiej w przybliżeniu fazie znajdował się wtedy około 2° nad nią.

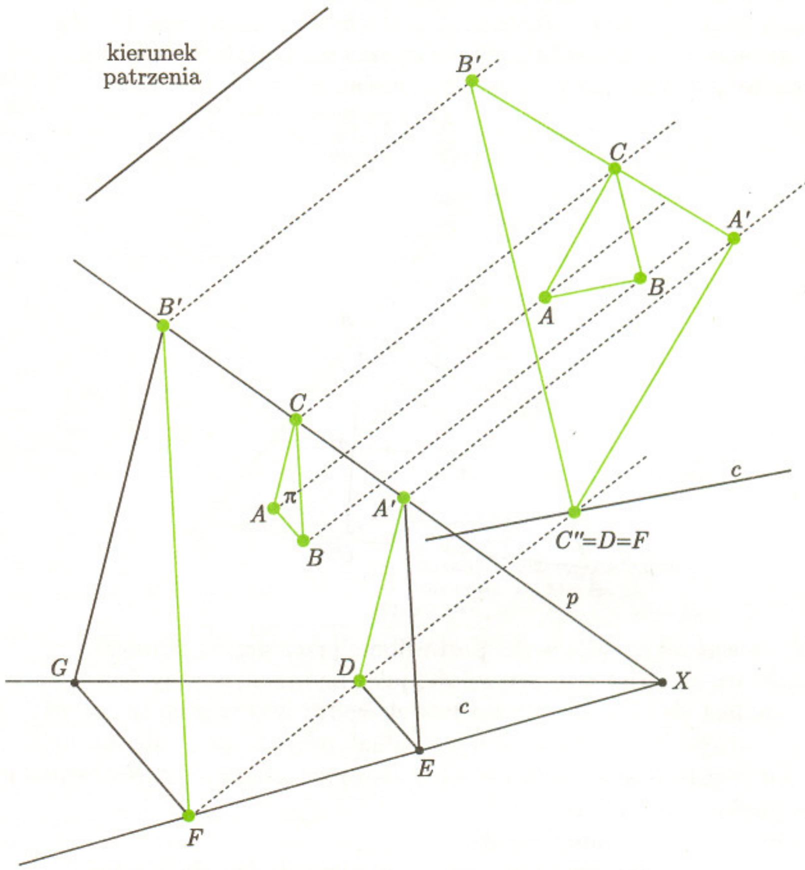
Prawie 700 lat później, w roku 1731, angielski lekarz i miłośnik astronomii, John Bevis odkrył mgławicę w pobliżu ζ Tauri. W 27 lat po nim, 12 września 1758 r., francuski poszukiwacz komet, Charles Messier, odkrył ją ponownie podczas obserwacji komety z tego roku. Zdarzenie to stało się dla niego inspiracją do stworzenia katalogu mgławic, gromad i galaktyk (choć to pojęcie wtedy jeszcze nie istniało), aby inni poszukiwacze nie mylili ich z kometami. Mgławica ta zajęła pierwsze miejsce w jego katalogu.

Długo nie było zgodności między astronomami co do natury nowo odkrytego obiektu. J. Herschel uważał, że jest to gromada gwiazd na granicy rozdzielczości teleskopu. J.E. Bode określił obiekt jako mgławicę bez gwiazd. Lord Rosse w 1884 r. zwrócił uwagę na budowę zewnętrznych części mgławicy i przyrównał je do łapek kraba, od czego powstała wkrótce jej oficjalna nazwa. Pomylił się jednak sądząc, że te łapki składają się z łańcuchów gwiazd. Wreszcie w 1913 r. na podstawie widma mgławicy stwierdzono, że składa się ona z gazu, a nie z gwiazd. Kilka lat później, w 1921 r., C.O. Lampland odkrył, że mgławica Krab rozszerza się. Prędkość ekspansji oceniono na $0{,}''2$ na rok, co przy odległości około 6300 lat świetlnych odpowiada prędkości rzędu 1000 km/s. Mgławica musiała więc powstać w wyniku eksplozji. Z tempa jej ekspansji W. Baade w 1942 r. obliczył jej wiek na 760 lat, co później zostało zmienione na 900 lat. Dziś nie ulega wątpliwości, że mgławica Krab jest pozostałością po tytułowej supernowej.

Najpierw udowodnimy następujący

Lemat.
Ustalmy na płaszczyźnie punkty A, B, A' i B'. Niech C będzie dowolnym punktem prostej $A'B'$. Przez punkty A' i B' poprowadźmy proste równoległe odpowiednio do BC i AC (patrz rys. 2). Niech C'' oznacza punkt przecięcia skonstruowanych prostych. Miejscem geometrycznym punktów C'' jest prosta c równoległa do prostej AB.

To właśnie powyższy lemat można „zobaczyć” w trzech wymiarach. Popatrzmy (rys. 3) na kąt trójścienny, w którym przez c oznaczymy ścianę naprzeciw wyróżnionej krawędzi p.



Rys. 3

Rozważmy punkty $A', B' \in p$. Punkty A i B wybierzmy na różnych ścianach kąta trójściennego w ten sposób, żeby odcinek AB był równoległy do ściany c. Poprowadźmy przez odcinek AB płaszczyznę π do przecięcia z prostą p w punkcie C, następnie oznaczmy przez D, E, F i G punkty wspólne krawędzi kąta dwuściennego i płaszczyzn równoległych do π poprowadzonych z punktów A' i B'; oznaczenia takie, jak na rysunku 3. Zastanówmy się, jak reagują punkty D, E, F i G na zmianę położenia punktu $C \in p$. Czworokąt $DEFG$ jest zawsze trapezem, kierunek pary równoległych boków nie zmienia się i jest taki, jak kierunek odcinka AB. Z twierdzenia Talesa wynika zatem, że

$$\frac{DE}{GF} = \frac{A'X}{B'X} = \text{const},$$

gdzie $X = p \cap c$ jest wierzchołkiem rozpatrywanego kąta trójściennego. Znaczy to, że każde dwa trapezy $DEFG$ są jednokładne względem punktu X, w szczególności kierunek DF nie zmienia się, a to oznacza, że patrząc na rysunek 3 w kierunku DF

z bardzo odległego punktu na płaszczyźnie c widzimy właśnie rysunek 2. (Prostą DF widzimy jako punkt C''.) ■

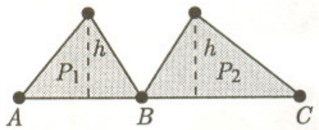
W dalszych rozważaniach zamiast o stosunku długości odcinków będziemy często mówić o stosunku pól trójkątów o jednakowych wysokościach i podstawach odpowiednio równych rozpatrywanym odcinkom – przy oznaczeniach z rysunku 4 mamy bowiem

$$\frac{AB}{BC} = \frac{P_1}{P_2}.$$

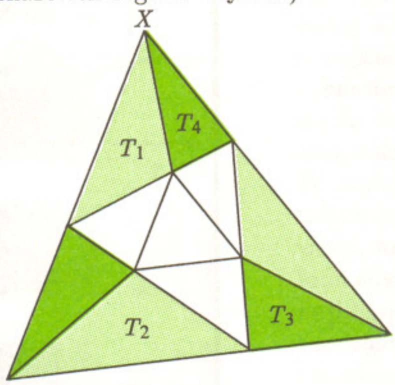
Będziemy również oznaczać przez I_X stosunek pól trójkątów położonych tak, jak na rysunku 5:

$$I_X := \frac{P(T_1)}{P(T_2)} \cdot \frac{P(T_3)}{P(T_4)}.$$

(Trójkąty oznaczamy kolejno: T_1, T_2, T_3, T_4; indeksy rosną, gdy punkt porusza się po obwodzie największego trójkąta od punktu X w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara – rys. 5.)



Rys. 4



Rys. 5

Dowód twierdzenia.
W nowych oznaczeniach równość z tezy twierdzenia to równość

$$I_{C''} = 1.$$

Zakładam, że Czytelnik zna dowód twierdzenia w przypadku, gdy punkty A, B, C są środkami boków trójkąta $A'B'C'$

Wszystkie pozostałe przypadki sprowadzimy do tego trywialnego. Łatwo sprawdzić, że zgodnie z definicją mamy

$$I_{A''} \cdot I_{B''} \cdot I_{C''} = 1.$$

Ustalmy teraz punkty A, B, A', B' i C', to znaczy załóżmy, że się nie zmieniają. Przy zmianie położenia punktu C na odcinku $A'B'$ wyrażenie $\frac{AB'}{AC'}$, oczywiście, nie zmienia wartości. Z drugiej strony, z udowodnionego lematu i twierdzenia Talesa wynika, że stosunek $\frac{A'B''}{A'C''}$ nie zmienia się. Wobec tego wyrażenie

$$I_{A''} = \frac{P(T_1)}{P(T_2)} \cdot \frac{P(T_3)}{P(T_4)} = \frac{P(T_1)}{P(T_4)} \cdot \frac{P(T_3)}{P(T_2)} = \frac{AB'}{AC'} \cdot \frac{A'B''}{A'C''}$$

ma stałą wartość, niezależnie od położenia punktu C na AB. Analogicznie $I_{B''} = \text{const}$. Zatem trzeci stosunek, $I_{C''}$, jest także stały, bowiem

$$I_{C''} = \frac{1}{I_{A''} \cdot I_{B''}} = \text{const}.$$

Wystarczy teraz przesunąć punkt C do środka odcinka $A'B'$. Podobnie postępujemy z punktami A i B. Ostatecznie, przekonujemy się, że stosunek $I_{C''}$ ma zawsze taką wartość, jak w przypadku trywialnym, gdy A, B, C są środkami boków trójkąta $A'B'C'$. ■

A swoją drogą ciekawe, czy właśnie taki dowód wymyślił wspomniany na początku maturzysta.

Obecnie wiemy, że supernową staje się gwiazda w późnej fazie ewolucji o masie większej od 8 mas Słońca. Gwiazda taka wytwarza w swoim wnętrzu żelazne jądro, w wyniku czego zachodzące tam reakcje termojądrowe ustają, ponieważ z żelaza nie da się syntetyzować kolejnych pierwiastków bez dostarczania energii. Powoduje to kurczenie się gwiazdy pod wpływem własnej grawitacji i wzrost temperatury w jądrze. Gdy temperatura dostatecznie wzrośnie, promieniowanie γ rozbija jądra żelaza na neutrony i protony. Proces ten pochłania dużo energii, powoduje więc gwałtowne zapadnięcie się gwiazdy, mające charakter implozji. Opadające na jądro warstwy zewnętrzne ogrzewają się i odbijają od niego tworząc wkrótce mgławicę otaczającą niezwykle zwarty obiekt centralny, gwiazdę neutronową.

W czasie, gdy po raz pierwszy powiązano mgławicę Krab z wybuchem supernowej, rozważania teoretyczne już sugerowały, że końcowym produktem eksplozji może być gwiazda neutronowa. Jednak dopiero w latach 60. udało się z całą pewnością potwierdzić obecność gwiazdy neutronowej w centrum mgławicy. Mianowicie, jeżeli gwiazda na początku obracała się powoli i miała słabe pole magnetyczne, to jej zapadnięte jądro – wskutek zasady zachowania momentu pędu i zachowania strumienia magnetycznego – ma szanse obracać się bardzo szybko i mieć potężne pole magnetyczne. Taka szybko rotująca gwiazda neutronowa omiatająca otaczający ją gaz swoim silnym polem magnetycznym będzie w nim wywoływać emisję różnych rodzajów promieniowania, które z daleka może być, przy szczęśliwym usytuowaniu obserwatora, odbierane jako błyski (impulsy) pojawiające się w rytmie rotacji gwiazdy. Gwiazda neutronowa może w ten sposób ujawnić swoje istnienie jako tzw. pulsar. Pierwszy pulsar odkryty został w 1967 r. (pani Jocelyn Bell i Anthony Hewish – później Nagroda Nobla!), a już w roku następnym zarejestrowano pulsy radiowe o okresie około 0,033 s dobiegające z centrum mgławicy Krab. Tak więc symbol M 1, nadany przypadkowo nieznanemu obiektowi mgławicowemu przez Messiera, oznacza obecnie gwiazdę zmienną CM Tau, lub pulsara NP 0532, a w sumie jeden z najosobliwszych obiektów w Galaktyce.