epsilon

8/97

(77)

Jeszcze raz o izometriach

W pierwszym numerze *EPSILONA* pisaliśmy o tym, że *jeśli funkcja z płaszczyzny w płaszczyznę zachowuje odległość (euklidesową) 1, to jest izometrią.* Analogiczne twierdzenie prawdziwe jest także dla funkcji z $\mathbf{R}^n$ w $\mathbf{R}^n$ dla $n \geq 2$. Oczywiście, problem można sformułować dla dowolnej przestrzeni metrycznej (to znaczy takiej, w której określona jest odległość między jej elementami) i nietrudno wykazać, że wówczas rozwiązanie może być inne. Wystarczy wziąć $\mathbf{R}$ i funkcję, która liczbie przyporządkowuje jej część całkowitą.

Odległość euklidesową na płaszczyźnie zapisujemy analitycznie: $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$; podobnie robimy to w przestrzeni $\mathbf{R}^n$, czyli zbiorze ciągów n-elementowych. Naturalnym uogólnieniem jest zbiór ciągów nieskończonych; jeżeli rozważać będziemy zbiór ciągów, dla których szereg $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i^2$ jest zbieżny, a odległość określimy jako $\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty}(x_i - y_i)^2\right)^{1/2}$, to otrzymamy przestrzeń metryczną, oznaczaną przez matematyków l_2. Ze względu na dobór metryki można tę przestrzeń traktować jako uogólnienie $\mathbf{R}^n$.

W przestrzeni l_2 z tego, że funkcja zachowuje odległość 1, nie wynika, że zachowuje wszystkie odległości. Oto idea konstrukcji przykładu; wykorzystamy pewne fakty z matematyki wyższej.

Wiadomo, że w przestrzeni l_2 istnieje podzbiór A gęsty i przeliczalny, to znaczy taki, że domknięcie A jest całą przestrzenią i elementy A można ponumerować liczbami naturalnymi. W szczególności każdemu elementowi x należącemu do l_2 można przyporządkować taki $a_n \in A$, że odległość między a_n i x jest mniejsza niż $\frac{1}{2}$. Oznaczmy to przyporządkowanie przez f.

Niech teraz b_n będzie elementem l_2 – czyli ciągiem – zdefiniowanym następująco: n-ty wyraz ciągu to $\frac{1}{\sqrt{2}}$, pozostałe zaś równe są 0. Łatwo sprawdzić, że dla różnych k i n elementy b_k i b_n są odległe o 1. Z określenia funkcji f wynika natomiast, że jeśli dwa elementy l_2 są odległe o 1, to ich obrazy przez funkcję f są różne. Jeżeli teraz weźmiemy funkcję $g : A \to l_2$, która element a_n przekształca na b_n, to nietrudno dostrzec, że funkcja $g \circ f$ zachowuje odległość 1. Izometrią jednak ona nie jest (dlaczego?)

Można zadać pytanie, co się stanie, gdy (w przypadku przestrzeni l_2) dodamy założenie o ciągłości funkcji zachowującej odległość 1. Otóż jeszcze 10 lat temu problem ten był otwarty i nic mi nie wiadomo o tym, by ostatnio ktoś go rozwiązał...

K.C.

Andrzej Turowicz (1904–1989) był księdzem i jednocześnie profesorem matematyki. Znał wielu sławnych polskich matematyków, w szczególności ze Lwowa, i opowiadał o nich barwne anegdoty. Ale i on sam był bohaterem oryginalnych historii...

Gdy przed kolokwium habilitacyjnym (1963) ojciec Turowicz zapytał prof. Ważewskiego, jak taki egzamin wygląda, gdyż chciał się przygotować, otrzymał odpowiedź: „no cóż, w najgorszym razie zostanie ksiądz męczennikiem, a przecież ksiądz o niczym innym nie marzy?”.

Wniosek o nominację profesorską Turowicza czekał prawie rok na opinię wojewódzkiego komitetu PZPR w Krakowie (wydanie pozytywnej opinii przez komitet było konieczne dla nadania wnioskowi dalszego biegu). Komitet zwlekał. W końcu, po ponagleniu przez sekretariat PAN, wydano werdykt: „stwierdzono, że docent Turowicz nie wyzyskiwał swojego stanowiska dla robienia propagandy religijnej”. Podobno, gdy wniosek dotarł już do Rady Państwa, do Dyrekcji Instytutu Matematycznego PAN nagle zatelefonował ówczesny I sekretarz KC PZPR, W. Gomułka, z pytaniem, dlaczego docent Turowicz mieszka w opactwie w Tyńcu. Odpowiedziano mu, że to wynika z papierów dołączonych do wniosku, na co on odrzekł: „a, no to dobrze”.

Ongiś z wizytą do Instytutu Matematycznego PAN w Krakowie, gdzie profesor Turowicz pracował, przybył z wizytą rumuński matematyk; obecność księdza w instytucie bardzo go zaskoczyła. Gdy następnego dnia przyszedł i księdza profesora nie było, zapytał: *A gdie towariszcz pop?*

Idziemy do szkoły

Dawno temu, na noworocznej herbatce pracowników Instytutu Matematyki UJ, Dyrektor zadał zagadkę: ilu pracowników ma Instytut? Dał wskazówkę, że jest to ładna liczba. Z kilku miejsc rozległy się głosy, że 77 – i była to odpowiedź dobra.

EPSILON ma prawie siedem lat. Pierwszy numer, przygotowany jesienią 1990, wyszedł drukiem w marcowym numerze *Delty* w roku 1991. Numer siedemdziesiąty siódmy ukazuje się w sierpniu, a 1 września siedmiolatki idą do szkoły.

Idziemy do szkoły i my! Czas na nas – trzeba się nauczyć pisać i czytać! W kilku najbliższych numerach *Delty* Czytelnicy nie znajdą *EPSILONA*. Wydawanie naszej kolumny zostaje zawieszone na czas nieokreślony. Trudno sprecyzować, na jak długo; może tylko na kilka miesięcy, może do $+\infty$?

Na jakiś czas zniknie zatem w *Delcie* winieta z krakowską czapką, symbolami ε i δ, i kwantyfikatorami takimi, jak je piszą matematycy na całym świecie i jak je pisali nawet w okresie zimnej wojny od USA po ZSRR – wszędzie, z wyjątkiem polskich szkół i polskich podręczników szkolnych (choć np. w podręcznikach Zofii Krygowskiej symbole kwantyfikatorów w ogóle nie były używane, Autorka pisała je słowami).

Sami jesteśmy bardzo ciekawi, czy (ewentualnie kiedy) spotkamy się jeszcze na łamach *Delty*?

Redakcja *EPSILONA*: Krzysztof Ciesielski (naczelny), Danuta Ciesielska, Zdzisław Pogoda, Ananiasz Pośmiechowski, Marcin Poźniak.
Adres do korespondencji: K. Ciesielski, Instytut Matematyki UJ, Reymonta 4, 30-059 Kraków, z dopiskiem ε.

Osiągnąwszy tyle wydań, ilu pracowników liczył Instytut Matematyki UJ, koledzy z *EPSILONA* postanowili udać się na wypoczynek. Dziękując im za dotychczasową współpracę jesteśmy przekonani, że nie ukryli swych piór na długo.

Redakcja Delty