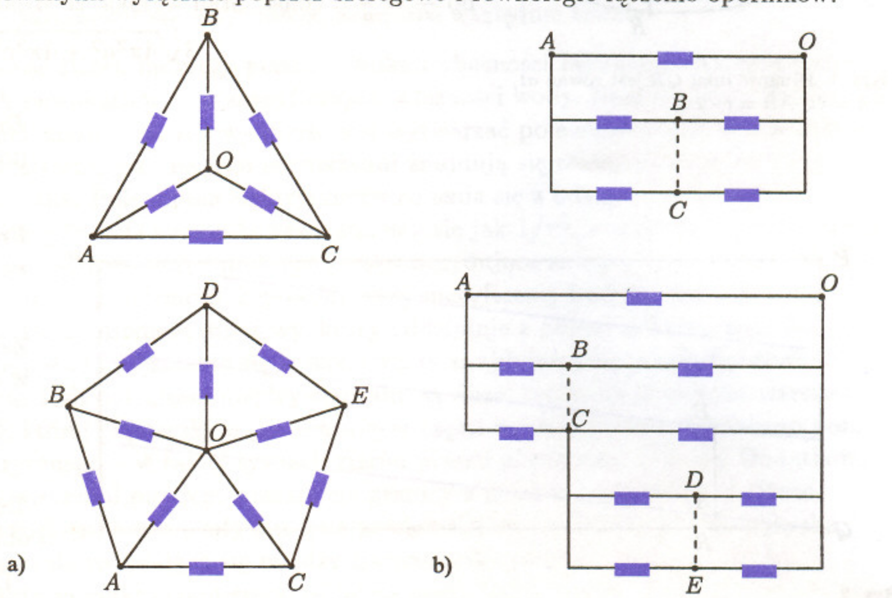
# Opór zastępczy wielokąta i złota proporcja

*Krzysztof REJMER*

Złota proporcja w naturalny sposób pojawia się w wielu zagadnieniach geometrycznych, ale nie tylko. Opór zastępczy prostej, nieskończonej sieci zbudowanej z oporników o jednostkowym oporze (patrz *Delta* 6/1997) jest równy właśnie współczynnikowi złotej proporcji. W przyrodzie można ją odnaleźć w zagadnieniu filotaksji. A oto jeszcze jeden przykład, w którym złota proporcja i liczby Fibonacciego pojawiają się w naturalny sposób. Z oporników o jednostkowym oporze zbudowano wielokąt w taki sposób, że oporniki łączą jego kolejne wierzchołki oraz wierzchołki ze środkiem. Jaki jest opór takiego układu mierzony między dowolnym z wierzchołków i środkiem ? Jak się on zmienia, gdy liczba wierzchołków dąży do nieskończoności?

Ten mało znany problem ma ciekawe rozwiązanie, które przedstawimy dla wielokątów o nieparzystej liczbie wierzchołków. Rysunek pokazuje dwa najprostsze takie wielokąty: trójkąt i pięciokąt wraz z równoważnymi im sieciami zbudowanymi wyłącznie poprzez szeregowe i równoległe łączenie oporników.




a) Wielokąty oporników.
b) Sieci zastępcze oporników. Punkty $B$ i $C$ mają ten sam potencjał, podobnie punkty $D$ i $E$ mają ten sam potencjał.

Opór mierzony jest pomiędzy punktami $A$ i $O$. Równoważność wynika z symetrii; z jej powodu niektóre pary punktów mają ten sam potencjał, a zatem można usunąć łączący je opornik (lub połączyć je dowolnym oporem) bez zmiany oporu całości układu. Na rysunku te usunięte oporniki zaznaczone są przerywanymi liniami. Oznaczmy przez $r$ operację obliczania oporu zastępczego dla dwóch równolegle połączonych oporników (polega ona na podzieleniu iloczynu obu oporów przez ich sumę), a przez $s$ operację obliczania oporu zastępczego dla połączenia szeregowego (czyli po prostu ich sumę). Opory zastępcze dla pierwszych trzech wielokątów można zapisać następująco

$$R_3 = 1r1 = \frac{1}{2},$$

$$R_5 = 1r\frac{1}{2}s\frac{1}{2}r1 = \frac{5}{11},$$

$$R_7 = 1r\frac{1}{2}s\frac{1}{2}r\frac{1}{2}s\frac{1}{2}r1 = \frac{13}{29},$$

Wielkość $\frac{1}{2}$ jest wynikiem równoległego połączenia dwóch jednostkowych oporów. Kolejne operacje w powyższych ciągach symboli można wykonywać zaczynając zarówno od lewej, jak i od prawej strony, co widać z symetrii wyrażeń. Nie wolno natomiast zacząć rachunków od środka wyrażenia; żeby zrozumieć dlaczego – wystarczy popatrzeć na równoważne wielokątom sieci zastępcze. Mówiąc inaczej, istnieją tylko dwa poprawne sposoby rozmieszczenia

**Rozwiązanie zadania M 814.** Niech $X$ będzie dowolnym punktem płaszczyzny. Oznaczmy przez $n(R,t)$ liczbę żywych modliszek, które w chwili $t$ są w odległości nie większej niż $R$ od punktu $X$. Łatwo sprawdzić, że

$$\frac{1}{2}n(r+10,t) \geq n(r,t+1),$$

bo w ciągu minuty modliszka przebywa najwyżej 10 metrów, a zatem każda modliszka, która w chwili $(t+1)$ znajduje się w odległości nie większej niż $r$ od $X$, w chwili $t$ była odległa od $X$ o nie więcej niż $r+10$, podobnie jak wszystkie modliszki, które zabiła między chwilą $t$ a $t+1$ (dlaczego?). Czynnik $\frac{1}{2}$ wyraża fakt, że na każdą żywą w chwili $t+1$ modliszkę przypada co najmniej jedna zabita między chwilą $t$ a $t+1$. Zatem

$$\begin{aligned} n(0,15) &\leq \frac{1}{2}n(10,14) \leq \\ &\leq \frac{1}{4}n(20,13) \leq \ldots \leq \\ &\leq \frac{1}{2^{15}}n(150,0) \leq \\ &\leq \frac{1}{32768}\,\frac{\pi(150+1)^2}{\pi} < 1, \end{aligned}$$

czyli po kwadransie żadna modliszka nie będzie przebywać w punkcie $X$. Punkt ten można wybrać dowolnie, co kończy dowód. (Por. zadania o saloonach mlecznych z *Delty* 8/1996.)

**Rozwiązanie zadania M 815.** Ponieważ $\sqrt{2} = \sqrt[4]{4}$, więc jeden czynnik iloczynu znika.

**Rozwiązanie zadania F 456.**
Skorzystamy z pojęcia kąta hiperbolicznego $\psi$, który w układzie jednostek, takim że $c \neq 1$, wyraża się wzorem
$$\operatorname{tgh}\psi = \frac{v}{c}$$
(dla przejścia między dwiema kolejnymi gwiazdami). Ponieważ kąt hiperboliczny jest wielkością addytywną, więc dla przejścia między $N$-tą gwiazdą a obserwatorem wynosi on
$$\Psi = N\psi,$$
czyli odpowiednia prędkość wynosi
$$V = c \cdot \operatorname{tgh}\left(N \operatorname{Artgh}\frac{v}{c}\right).$$
Gdy $N \to \infty$, to $V \to c$.

nawiasów; są to takie rozmieszczenia, przy których we wnętrzu każdej pary nawiasów znajduje się co najwyżej jedna para nawiasów (oczywiście, może ona zawierać w swoim wnętrzu inną parę) i jedna operacja łączenia oporników. Zauważmy, że każdy opór zastępczy powyższego ciągu (oprócz, oczywiście, pierwszego) otrzymamy umieszczając we wnętrzu wyrażenia odpowiadającego jego poprzednikowi symbol $r\frac{1}{2}s\frac{1}{2}$ bezpośrednio przed końcowym $r1$ (lub $\frac{1}{2}s\frac{1}{2}r$ bezpośrednio po pierwszym $1r$). Zapiszmy opór $n$-kąta w postaci ułamka
$$R_n = ar1 = \frac{k}{l},$$
gdzie $a$ jest wynikiem operacji poprzedzających $r1$, natomiast $k$ i $l$ są liczbami względnie pierwszymi (fakt, że wynik dla dowolnego $n$ jest liczbą wymierną, jest trywialny). Posługując się regułami łączenia oporów w natychmiastowy sposób możemy wyrazić $a$ przez $k$ i $l$
$$a = \frac{k}{l-k}.$$
Wartość oporu dla $n+2$-kąta jest, zgodnie z tym, co już powiedzieliśmy, równa
$$R_{n+2} = ar\frac{1}{2}s\frac{1}{2}r1 = \frac{3k+l}{5k+3l}.$$
W ten sposób, zaczynając od pierwszego elementu ciągu, dla którego $k=1$ i $l=2$, możemy obliczyć dowolny jego element.

Zwróćmy teraz uwagę na następujący ciekawy fakt. Dla obliczonych trzech oporów zastępczych liczniki ułamków są liczbami Fibonacciego, natomiast mianowniki są sumami liczby poprzedzającej i następującej w ciągu Fibonacciego po liczbie będącej licznikiem. Czy jest to przypadek, czy też prawidłowość? Gdyby to była prawda dla dowolnego oporu, jego wartość można by zapisać jako
$$R_n = \frac{F_n}{F_{n+1} + F_{n-1}} = \frac{1}{2\frac{F_{n+1}}{F_n} - 1},$$
a zatem dla $n$ dążącego do nieskończoności opór dążyłby do
$$\frac{1}{2\tau - 1} = \frac{1}{\sqrt{5}},$$
gdzie $\tau$ jest współczynnikiem złotej proporcji.

Najprostszy sposób sprawdzenia, że tak jest istotnie, to dowód indukcyjny. Wiemy, że dla małych wartości $n$ opór zastępczy $R_n$ wyraża się w opisany sposób przez liczby Fibonacciego. Załóżmy zatem, że dla pewnego $n$ zachodzi
$$R_n = \frac{k}{l} = \frac{F_n}{F_{n+1} + F_{n-1}}.$$
Dla $n$ większego o 2 mamy
$$R_{n+2} = \frac{3k+l}{5k+3l} = \frac{F_n + F_{n+1}}{F_n + 3F_{n+1}}.$$
Ostatni ułamek przepiszemy w postaci
$$\frac{F_{n+2}}{F_{n+2} + 2F_{n+1}} = \frac{F_{n+2}}{F_{n+3} + F_{n+1}},$$
co kończy dowód.

W przypadku gdy wielokąt ma parzystą liczbę wierzchołków, jego opór zastępczy także wyraża się przez liczby Fibonacciego, choć jest to bardziej złożona formuła. Jednak i wtedy dla $n$ dążącego do nieskończoności opór dąży do $\frac{1}{\sqrt{5}}$. Sprawdzenie tego niech pozostanie ćwiczeniem dla dociekliwego Czytelnika.

W analogiczny sposób można obliczyć pojemność zastępczą wielokąta zbudowanego z jednakowych kondensatorów o jednostkowej pojemności. Znając wynik dla wielokąta zbudowanego z oporników wynik dla kondensatorów możemy podać natychmiast. We wszystkich równaniach musimy zastąpić $\frac{1}{2}$ przez 2 oraz zamienić miejscami $r$ i $s$, a ostateczny wynik, czyli pojemność zastępcza to, oczywiście, $\sqrt{5}$.

Na koniec pozostaje jeszcze dodać, że zaprezentowany tu sposób obliczenia zastępczego oporu został podany przez Kanadyjczyka Roberta H. Marcha.