# Klub 44

## Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

**Skrót regulaminu**

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru $n$ w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie $S$ oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a $N$ – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1997.

Czołówka ligi zadaniowej
**Klub 44 M**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 329 ($WT$=1,50), 330 ($WT$=2,17), z numeru 11/1996

| | | |
|---|---|---|
| Piotr Żmijewski | – Łódź | 42,82 |
| Krzysztof Zapisek | – Warszawa | 40,70 |
| Bartłomiej Dyda | – Wrocław | 40,00 |
| Jarosław Łazuka | – Warszawa | 35,44 |

*Redaguje Marcin E. KUCZMA*

## Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 3/1997

**Przypominamy treść zadań:**

**337.** Niech $\alpha = (i\sqrt{3}-1)/2$. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f$ zmiennej zespolonej $z$, o wartościach zespolonych, spełniające równanie funkcyjne $f(\alpha z+1)+f(z)=z^2$.

**338.** Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\binom{2n}{k}k^n = 0$.

**337.** Liczby 1, $\alpha$, $\alpha^2$ są trzema różnymi pierwiastkami trzeciego stopnia z jedności. Tak więc $\alpha^2+\alpha+1=0$, $\alpha^3=1$. Obliczamy kolejne iteracje funkcji liniowej $l(z)=\alpha z+1$:

$$ll(z) = \alpha^2 z+\alpha+1, \qquad lll(z) = \alpha^3 z+\alpha^2+\alpha+1 = z\,.$$

W podanym równaniu

$$f(l(z))+f(z)=z^2 \tag{1}$$

zastępujemy $z$ najpierw przez $l(z)$, a następnie przez $ll(z)$:

$$f(ll(z))+f(l(z))=(l(z))^2, \tag{2}$$

$$f(lll(z))+f(ll(z))=(ll(z))^2. \tag{3}$$

A ponieważ $f(lll(z))=f(z)$, zatem związki (1), (2), (3) stanowią (dla ustalonej liczby $z$) układ trzech równań liniowych z niewiadomymi $f(z)$, $f(l(z))$, $f(ll(z))$. Rozwiązując ten układ otrzymujemy wynik:

$$f(z)=\tfrac{1}{2}(z^2+(ll(z))^2-(l(z))^2)\,;$$

po przekształceniu:

$$f(z)=(\alpha+1)z^2-2\alpha z+\tfrac{1}{2}(\alpha-1)\,.$$

Ta funkcja spełnia równanie (1) i jest jego jedynym rozwiązaniem.

**338.** Weźmy pod uwagę funkcję

$$g(x)=(\mathrm{e}^x-1)^{2n}=\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\binom{2n}{k}\mathrm{e}^{kx}$$

i obliczmy jej $n$-tą pochodną:

$$g^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\binom{2n}{k}k^n\mathrm{e}^{kx}\,.$$

Z rozwinięcia potęgowego funkcji $\mathrm{e}^x$ dostajemy równość

$$g(x)=\left(x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots\right)^{2n}=x^{2n}+c_1x^{2n+1}+c_2x^{2n+2}+\ldots\,;$$

napisane szeregi potęgowe są zbieżne dla wszystkich $x$; dokładne wartości współczynników $c_j$ nie mają znaczenia. Z otrzymanej równości wynika, że $g^{(n)}(0)=0$. W połączeniu z wcześniejszym wzorem daje to tezę zadania.

*Redaguje Jerzy B. BROJAN*

## Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 3/1997

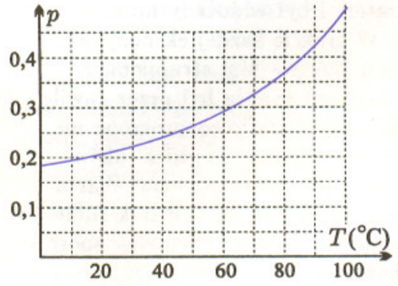
**Przypominamy treść zadań:**

**235.** Na rysunku 1 przedstawiono zależność od temperatury stosunku mas cukru i wody $p$ w roztworze nasyconym. Obliczyć maksymalną temperaturę wody, której dolanie do nasyconego roztworu cukru w wodzie o temperaturze 100°C spowoduje krystalizację części cukru (choćby niewielkiej). Rozważyć dwa przypadki:

a) dolewamy niewielką ilość wody,

b) dolewamy ilość wody równą 1/3 początkowej ilości wody w roztworze.

Należy przyjąć, że ciepło pobrane lub oddane podczas zmiany temperatury roztworu jest równe sumie wyrażeń odpowiadających zmianie temperatury wody i cukru, przy czym ciepło właściwe cukru jest równe 0,30 ciepła właściwego wody.



Rys. 1

**236.** Napastnik biegnący w stronę bramki przeciwnika znajduje się na wprost niej i otrzymuje boczne podanie: piłka toczy się poziomo z prędkością 25 m/s równolegle do linii bramkowej w odległości 20 m od niej. Gdy napastnik kopie piłkę, jego noga porusza się do przodu z prędkością 15 m/s. Ocenić orientacyjnie niezbędną do zdobycia bramki dokładność czasu $\Delta t$, w którym noga przekracza dowolną linię. Szerokość bramki wynosi 7,3 m, a średnica piłki – 22 cm. Pominąć rolę bramkarza i kwestie związane z wysokością poprzeczki i nogi.

**235.** Rozważymy najpierw punkt b). Przesycenie roztworu i krystalizacja nadwyżki cukru nastąpi wtedy, gdy spełniona będzie nierówność

$$p(T_0) > (1+q)p(T_k)\,,$$

gdzie $T_0 = 100°\mathrm{C}$ jest temperaturą początkową roztworu, $T_k$ jest temperaturą po dolaniu wody, a $q = 1/3$ jest stosunkiem masy dolanej wody do początkowej masy wody w roztworze. Z wykresu odczytujemy $p(T_0) \approx 0{,}49$ (lub nieco mniej) i obliczamy $p(T_0)/(1+q) \approx 0{,}36 \div 0{,}37$. Rozpatrując dalej przypadek graniczny (gdy nierówność przechodzi w równość) odczytujemy maksymalną wartość $T_k \approx 81°\mathrm{C}$. Aby wyznaczyć początkową temperaturę wody $T$, ułożymy bilans ciepła:

$$c_w(T_0 - T_k) + p(T_0)c_c(T_0 - T_k) = qc_w(T_k - T)\,,$$

gdzie $c_w$ i $c_c$ są ciepłami właściwymi wody i cukru. Dzieląc obie strony przez $c_w$ dochodzimy do równania

$$\tau(T_0 - T_k) = q(T_k - T)\,,$$

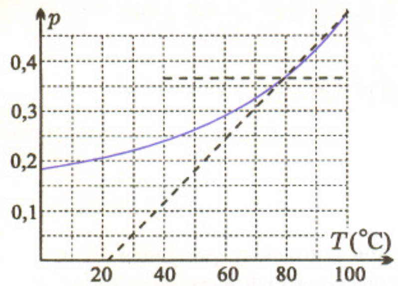
gdzie $\tau = 1 + p(T_0)c_c/c_w \approx 1{,}146$. Stąd obliczamy $T \approx 15°\mathrm{C}$. Powyższe rachunki można zinterpretować graficznie w sposób następujący: prowadzimy na wykresie $p(T)$ prostą poziomą na wysokości $p(T_0)/(1+q)$, na przecięciu tej prostej z wykresem znajdujemy $T_k$ i przez te dwa punkty wykresu prowadzimy sieczną przedłużając ją do przecięcia z osią temperatury (rys. 2). Odcinek pomiędzy punktem przecięcia a $T_k$ jest równy $(T_0 - T_k)/q$ i w celu wyznaczenia $T$ należy go powiększyć o czynnik $\tau$, tzn. $T$ jest punktem na osi temperatury, którego odległość od $T_k$ jest $\tau$ razy większa niż odległość wspomnianego punktu przecięcia od $T_k$.

Czołówka ligi zadaniowej
**Klub 44 F**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 229 ($WT$=1,38), 230 ($WT$=3,25) z numeru 12/1996

| | | |
|---|---|---|
| Przemysław Gworys | – Częstochowa | 45,05 |
| Andrzej Idzik | – Bolesławiec | 43,35 |
| Przemysław Gadziński | – Środa Śl. | 32,66 |

Jako piąty z kolei do grona Weteranów **Klubu 44F** dołącza P. Gworys.

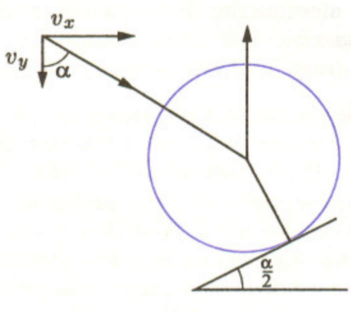
Przedstawiona interpretacja graficzna pozwala bez trudności przejść do granicy $q \to 0$, $T_k \to T_0$ (punkt a) zadania) – wystarczy tylko zamiast siecznej poprowadzić styczną do wykresu w punkcie $T_0$. Styczna ta przecina oś temperatury w punkcie odpowiadającym około 40°C; po pomnożeniu 100°C – 40°C = 60°C przez $\tau$ otrzymujemy 69°C, czyli $T \approx 31°\mathrm{C}$.



Rys. 2

**236.** Dla uproszczenia pominiemy obrót piłki i przyjmiemy, że siła działająca na nią w chwili kopnięcia jest prostopadła do jej powierzchni. Załóżmy też, że masa nogi jest znacznie większa od masy piłki, a odbicie jest sprężyste (pominięte efekty są istotne dla kierunku lotu piłki, ale ich znaczenie dla wymaganej dokładności czasu jest prawdopodobnie niewielkie). W układzie związanym z butem piłka porusza się ukośnie (rys. 3), przy czym składowa $x$ prędkości jest równa $v_x = 25$ m/s, a wartość bezwzględna składowej $y$ – równa $v_y = 15$ m/s, zatem wartość kąta kierunkowego $\alpha$ wynika z równania $\operatorname{tg}\alpha = v_x/v_y$. Aby odbicie nastąpiło w przód, kąt odbicia powinien wynosić $\alpha/2$. Błąd czasu $\Delta t$ oznacza na rysunku 3 pionowe przesunięcie buta (którego rozmiary pomijamy) o odcinek $\Delta y = v_y\Delta t$; punkt zetknięcia przesunie się wtedy po powierzchni piłki o $\Delta y/\sin(\alpha/2)$, a kierunek lotu odbitej piłki zmieni się o

$$\Delta\alpha = \frac{2\Delta y}{r\sin(\alpha/2)} = \frac{2v_y\Delta t}{r\sin(\alpha/2)}\,,$$



Rys. 3

gdzie $r$ – promień piłki. Powyższy wzór przedstawia kąt $\Delta\alpha$ w układzie odniesienia związanym z butem, natomiast aby ocenić jego maksymalną wartość pozwalającą trafić do bramki, należy przejść do układu nieruchomego, przy czym $\Delta\alpha$ ulegnie podzieleniu przez czynnik $1 + \cos\alpha$ (szczegóły wyprowadzenia pomijamy). Przyrównując otrzymane wyrażenie do szerokości kątowej bramki i podstawiając dane liczbowe znajdujemy $\alpha = 59°$, $\Delta t \approx 1$ ms.