Geometria Minkowskiego

Wojciech KOPCZYŃSKI

Za datę powstania szczególnej teorii względności (STW) przyjmuje się rok 1905, w którym ukazał się artykuł Alberta Einsteina *Zur Elektrodynamik der bewegter Körper* – w tłumaczeniu polskim *O elektrodynamice ciał w ruchu*. W artykule tym została zawarta w zasadzie cała treść fizyczna STW, zwłaszcza zaś zależność pomiarów czasu i długości od obserwatora uwidoczniona w efektach dylatacji czasu i skrócenia długości Lorentza–Fitzgeralda. Te i inne efekty relatywistyczne okazały się konsekwencjami *przekształceń Lorentza*, łączących współrzędne czasoprzestrzenne (t, x, y, z) jednego obserwatora inercjalnego ze współrzędnymi (t', x', y', z') innego takiego obserwatora. (Przez obserwatora inercjalnego rozumiemy takiego obserwatora, dla którego ruchy swobodne są ruchami prostoliniowymi i jednostajnymi.) Przekształcenia Lorentza mają postać

$$t' = \frac{t - Vx}{\sqrt{1-V^2}}\,, \quad x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1-V^2}}\,, \quad y' = y\,, \quad z' = z\,,$$

przy czym: użyłem układu jednostek, w którym prędkość światła jest $c = 1$; przyjąłem, że obserwator o współrzędnych primowanych porusza się z prędkością V w dodatnim kierunku osi x; oraz że w chwili mijania się obserwatorów wszystkie ich współrzędne wynoszą zero.

Rozwiązanie zadania M 813.
Niech $w_i = \frac{v_i}{|v_i|}$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$. W ten sposób sprowadzamy zadanie do przypadku wektorów o długości jednostkowej. Niech A_i oznacza koniec wektora v_i o początku w punkcie O. Z twierdzenia cosinusów wnioskujemy, że

$$|A_iA_j| \geq \sqrt{|OA_i|^2 + |OA_j|^2} = \\ = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \text{ dla } i \neq j\,.$$

Zatem kule o środkach $A_1, \ldots, A_n$ i promieniach $\sqrt{2}/2$ mają rozłączne wnętrza. Z drugiej strony są one zawarte w kuli o środku O i promieniu $1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$, więc z porównania objętości wynika, że

$$\frac{4}{3}\pi\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 \geq n \cdot \frac{3}{4}\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3,$$

czyli

$$n \leq (\sqrt{2}+1)^3 = 5\sqrt{2} + 7 < 15\,.$$

To oszacowanie dalekie jest od optymalnego. Jak je poprawić?

Formułując STW Einstein nie używał pojęcia czasoprzestrzeni – zbioru zdarzeń, operował oddzielnie pojęciami czasu i przestrzeni, mimo że każdy obserwator inercjalny – jak sugerują to przekształcenia Lorentza – ma swój własny czas i przestrzeń. Pojęcie czasoprzestrzeni pojawiło się podczas odczytu wygłoszonego w 1908 roku przez Hermanna Minkowskiego w Kolonii. Minkowski pokazał, że do opisu STW wygodnie jest posługiwać się szczególną czterowymiarową geometrią, nazwaną później jego nazwiskiem.

Osoby stykające się po raz pierwszy z geometrią czasoprzestrzeni często nie umieją sobie poradzić z dylematem: jak pogodzić geometrię z czterowymiarowością. Fachowcy radzą uzmysłowić sobie, że aby opisać zdarzenie należące np. do historii pewnego punktu materialnego, trzeba podać cztery liczby – jedną określającą czas zajścia zdarzenia i trzy określające jego położenie. Laikom rada ta rzadko pomaga. Można spróbować więc innej drogi i zamiast opisywać czterowymiarową czasoprzestrzeń, zająć się dwuwymiarową *czasoprostą*. I to jest chyba właściwy sposób, bo wszystkie istotne cechy 4–wymiarowej geometrii Minkowskiego widoczne są w jej 2–wymiarowym wariancie. Zajmę się więc geometrią czasoprostej, tj. zbiorem zdarzeń należących do historii pewnej prostej spoczywającej względem pewnego obserwatora inercjalnego. Na czasoprostej z przekształceń Lorentza pozostaje to, co istotne,

$$t' = \frac{t - Vx}{\sqrt{1-V^2}}\,, \quad x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1-V^2}}\,,$$

a o współrzędnych y i z można zapomnieć. Do sparametryzowania tych przekształceń wygodnie jest użyć – zamiast prędkości V – ***kąta hiperbolicznego*** ψ, określonego wzorem

$$\sinh\psi = \frac{V}{\sqrt{1-V^2}}\,.$$

Przypominamy, że

$$\sinh\psi = \frac{1}{2}\left(e^{\psi} - e^{-\psi}\right)$$

natomiast

$$\cosh\psi = \frac{1}{2}\left(e^{\psi} + e^{-\psi}\right)\,.$$

Stosując wzory trygonometrii hiperbolicznej $\cosh^2\psi - \sinh^2\psi = 1$ i $\operatorname{tgh}\psi = \sinh\psi/\cosh\psi$ szybko otrzymuję

$$\cosh\psi = \frac{1}{\sqrt{1-V^2}}\,, \qquad \operatorname{tgh}\psi = V\,,$$

a przekształcenia Lorentza przybierają postać

$$t' = \cosh\psi \cdot t - \sinh\psi \cdot x\,, \quad x' = -\sinh\psi \cdot t + \cosh\psi \cdot x\,.$$

Wzory te jako żywo przypominają wzory na obrót kartezjańskiego układu współrzędnych wokół jego początku. Aby się o tym przekonać, należy podstawić $\psi = \mathrm{i}\phi$ oraz $t = \mathrm{i}\tau$. Korzystając wtedy z tożsamości $\cosh \mathrm{i}\phi = \cos\phi$ oraz $\sinh \mathrm{i}\phi = \mathrm{i}\sin\phi$, otrzymuję

$$\tau' = \cos\phi \cdot \tau - \sin\phi \cdot x\,, \qquad x' = \sin\phi \cdot \tau + \cos\phi \cdot x\,,$$

czyli wzory na obrót.

Rozwiązanie zadania F 455. Ślady zostawiane przez gwiazdy są przecięciami stożków (powstałych przez obrót prostej przechodzącej przez środek układu optycznego i gwiazdę wokół osi równoległej do osi świata) z płaszczyzną błony fotograficznej. Przecięcie stożka i płaszczyzny może wyznaczać prostą, tylko jeżeli płaszczyzna zawiera oś symetrii stożka lub jeżeli stożek jest płaszczyzną, tzn. ma kąt rozwarcia π. W opisanym przypadku tylko druga możliwość wchodzi w grę (dlaczego?). W takim razie gwiazda musi leżeć na równiku niebieskim, tzn. musi mieć deklinację 0 stopni.

Kąt hiperboliczny ψ jest bardzo wygodnym sposobem parametryzacji przekształceń Lorentza. Przy składaniu przekształceń Lorentza kąty hiperboliczne dodają się – podobnie jak dodają się zwykłe kąty przy składaniu obrotów. W ten sposób kąt hiperboliczny przejmuje rolę prędkości z fizyki przedrelatywistycznej. Jeśli mamy trzech obserwatorów, obserwator 2 porusza się względem obserwatora 1 z prędkością $V_1 = \operatorname{tgh}\psi_1$, a obserwator 3 porusza się względem obserwatora 2 z prędkością $V_2 = \operatorname{tgh}\psi_2$, to prędkość obserwatora 3 względem obserwatora 1 dana jest w fizyce przedrelatywistycznej wzorem $V = V_1 + V_2$, a w fizyce relatywistycznej uwikłanym wzorem $\psi = \psi_1 + \psi_2$.

Geometria Minkowskiego przejmuje z geometrii euklidesowej pojęcia afiniczne, a więc pojęcia punktu, prostej i prostych równoległych (które nigdzie się nie przecinają). Różni się zaś od geometrii euklidesowej pojęciami metrycznymi, a więc takimi jak długość odcinka (wektora), pojęcie kąta między prostymi i twierdzenie Pitagorasa.

Warto zauważyć, że odpowiednikiem kwadratu wektora o początku w punkcie $(0,0)$ i końcu w punkcie (x,τ), czyli

$$x^2 + \tau^2\,,$$

jest w geometrii Minkowskiego liczba

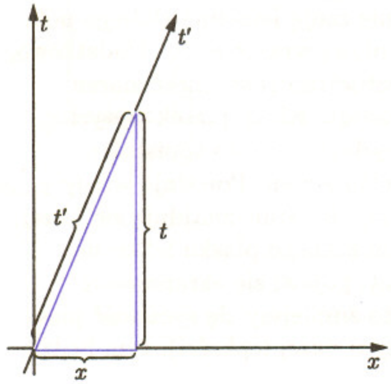
$$x^2 - t^2\,,$$

która zwana jest interwałem i która przyjmuje zarówno wartości dodatnie, jak ujemne. W związku z tym wektory dzielimy na: czasowe – dla których liczba ta jest ujemna, zerowe – dla których wynosi zero i przestrzenne – dla których jest dodatnia. Końce wektorów zerowych w czasoprostej leżą na tzw. prostych zerowych $x = \pm t$ (w czasoprzestrzeni zaś tworzą tzw. stożek Minkowskiego).

Mając już pojęcie kwadratu $\mathbf{u}^2$ wektora $\mathbf{u}$, można stworzyć pojęcie iloczynu skalarnego wektorów $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$, stosując wzór

$$2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = (\mathbf{u}+\mathbf{v})^2 - \mathbf{u}^2 - \mathbf{v}^2\,.$$

Wektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$, takie że $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$, nazywamy prostopadłymi. Łatwo zauważyć, że do wektora czasowego może być prostopadły tylko wektor przestrzenny, natomiast wektor zerowy jest prostopadły tylko do współliniowego z nim wektora zerowego (uwaga: wymiar = 2). Oś x jest prostopadła do osi t, a ponieważ wszyscy obserwatorzy inercjalni są równoprawni, więc dotyczy to także osi x' i t'. Gdy wykonasz rysunki tych osi posługując się przekształceniami Lorentza, Twoja euklidesowa intuicja powie Ci, że te stwierdzenia nie mogą być jednocześnie prawdziwe dla obu par osi. Chcąc wyczuć geometrię Minkowskiego, powinieneś więc częściowo odejść od euklidesowej intuicji.



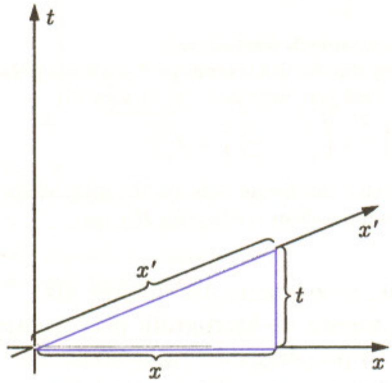
Rys. 1

Aby można było zbudować na czasoprostej trójkąt prostokątny, jedna z jego przyprostokątnych musi być czasowa, a druga przestrzenna. Skieruję wzdłuż tych przyprostokątnych osie t i x odpowiadające pewnemu obserwatorowi inercjalnemu. Przeciwprostokątna może być czasowa, zerowa lub przestrzenna.

W przypadku gdy przeciwprostokątna jest czasowa, można wzdłuż niej skierować oś t' pewnego obserwatora inercjalnego (rys. 1), a odpowiednik wzoru Pitagorasa przybierze postać $t'^2 = t^2 - x^2$. Na przeciwprostokątnej jest $x' = 0$, więc przekształcenia Lorentza dają $x = Vt$, czyli

$$t' = \sqrt{1-V^2}\,t < t\,.$$

Zatem ta forma wzoru Pitagorasa odpowiada efektowi dylatacji czasu: czas w układzie poruszającym się biegnie wolniej.



Rys. 2

W przypadku gdy przeciwprostokątna jest przestrzenna, można wzdłuż niej skierować oś x' pewnego obserwatora inercjalnego (rys. 2), a odpowiednik wzoru Pitagorasa przyjmie postać $x'^2 = x^2 - t^2$. Teraz na przeciwprostokątnej $t = Vx$, czyli

$$x' = \sqrt{1-V^2}\,x < x\,.$$

Zatem ta forma wzoru Pitagorasa odpowiada efektowi skrócenia Lorentza–Fitzgeralda: pręt poruszający się jest widziany jako krótszy.