

O zbieżności ciągów sum Riemanna, wzorach Stirlinga, Wallisa i...

Grzegorz RZĄDKOWSKI

W niniejszym artykule proponujemy Czytelnikom ciekawy i stosunkowo prosty dowód wzorów Stirlinga i Wallisa.

Po przebrnięciu przez niezbędne przygotowania techniczne otrzymamy nie tylko obie sławne równości, ale też swego rodzaju maszynę do produkowania innych, podobnych.

Załóżmy, że funkcja $f(x)$ jest ciągła na przedziale domkniętym $[a, b]$.

Podzielmy ten przedział na n równych części punktami

$x_k = a + k \frac{b-a}{n}$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n$). Suma Riemanna funkcji f , dana wzorem

$$(1) \quad \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k),$$

to suma pól prostokątów o wysokościach $f(x_k)$ i jednakowych

podstawach $\frac{b-a}{n}$. Gdy $f > 0$, suma (1) przybliża pole figury ograniczonej od góry wykresem funkcji $f(x)$, od dołu osią x -ów,

a z boków prostymi $x = a$ i $x = b$. Gdy $n \rightarrow \infty$, to granicą ciągu sum

Riemanna jest właśnie owo pole, czyli całka $\int_a^b f(x) dx$.

Zastanówmy się, jak szybko ciąg sum Riemanna zmierza do swojej

granicy. Załóżmy, że funkcja $f(x)$ ma na przedziale $[a, b]$ ciągłą

po pochodną (a na końcach przedziału, czyli w punktach $x = a$ i $x = b$,

ma pochodne jednostronne). Różnicę między całką a sumą Riemanna

możemy zapisać następująco:

$$(2) \quad \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(x) - f(x_k)) dx.$$

Oznaczmy przez t_k środek przedziału $[x_{k-1}, x_k]$ (tzn. niech

$t_k = \frac{x_{k-1} + x_k}{2}$) i zastosujmy wzór na całkowanie przez części do

każdej z całek po prawej stronie (2), by po nietrudnym rachunku otrzymać

$$\begin{aligned} \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(x) - f(x_k)) dx &= \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x - t_k)' (f(x) - f(x_k)) dx = \\ &= \frac{b-a}{2n} (f(x_{k-1}) - f(x_k)) - \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x - t_k) f'(x) dx. \end{aligned}$$

Po zsumowaniu względem k i pomnożeniu obydwu stron przez n otrzymujemy

$$\begin{aligned} n \left(\int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) \right) &= \\ &= \frac{b-a}{2} (f(a) - f(b)) - n \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x - t_k) f'(x) dx. \end{aligned}$$

Dyski protoplanetarne

Michał RÓŻYCZKA

Współczesna teoria ewolucji układów planetarnych opiera się na założeniu, iż powstają one jednocześnie ze swymi gwiazdami centralnymi z gęstych obłoków materii międzygwiazdowej, w których nad wszystkimi pozostałymi siłami przeważały w pewnym momencie siły samograwitacji. Założenie to ma dziś mocną podstawę obserwacyjną. Po pierwsze, na gęste obłoki zbudowane z cząsteczek wodoru oraz tlenu węgla i innych związków chemicznych (tzw. obłoki molekularne) przypada ponad połowa masy ośrodka międzygwiazdowego (budulca na gwiazdy i planety jest więc w naszej Galaktyce wystarczająco dużo). Po wtóre, najgęstsze obłoki molekularne (a więc te, w których siły samograwitacji są najsilniejsze) mają masy porównywalne z masami gwiazd. Po trzecie wreszcie, młode gwiazdy występują wyłącznie w obłokach molekularnych lub w ich bezpośrednim sąsiedztwie.

W najgęstszych obłokach obserwuje się ruchy, które mogą być zinterpretowane jako obrót wokół dobrze określonej osi. Zgodnie z teorią, samograwitacyjne kurczenie się (tzw. kolaps) obłoku obdarzonego ruchem obrotowym prowadzi do powstania niewielkiego, stacjonarnego obiektu centralnego otoczonego rozległym dyskiem (tzw. dyskiem akrecyjnym). Wnętrze dysku jest również niemal stacjonarne (wszelkie ruchy poza ruchem obrotowym wokół obiektu centralnego odbywają się z prędkościami dużo mniejszymi niż lokalna prędkość orbitalna). Faza kolapsu jest bardzo krótka, trwa bowiem nie więcej niż 10^5 lat.

Uformowany już dysk podlega dalszej powolnej ewolucji, w której trakcie znajdująca się w nim materia częściowo osiada na obiekcie centralnym (proces ten nosi nazwę akrecji), częściowo zaś jest wywiewana w przestrzeń międzygwiazdową. Podczas trwającej kilka milionów lat fazy akrecji centralny obiekt dysku przekształca się w protogwiazdę, która od zwykłej gwiazdy różni się jedynie tym, iż w jej wnętrzu nie zachodzą jeszcze reakcje jądrowe. Jednocześnie w całym dysku z pierwiastków i związków chemicznych, które w macierzystym obłoku znajdowały się w stanie gazowym, powstają ziarna pyłowo-łodowe. Pod wpływem grawitacji ziarna te przemieszczają się następnie w pobliże płaszczyzny równikowej dysku.

Jeśli chaotyczne ruchy składowej gazowej dysku (turbulencja) nie są zbyt silne, wędrowka ziaren jest procesem bardzo szybkim: na dotarcie do płaszczyzny

równikowej ziarna (nawet te powstałe tuż przy powierzchni dysku) potrzebują nie więcej niż stu lat. W płaszczynie równikowej wykształca się bardzo cienki dysk pyłowy, którego grubość może być nawet stokrotnie mniejsza od grubości dysku gazowego. Dysk o tak znikomej grubości wykazuje naturalną tendencję do rozpadu na fragmenty o masach rzędu 10^{15} kg, które pod wpływem samograwitacji w ciągu paru tysięcy lat skupiają się w planetozymale – obiekty o rozmiarach kilkudziesięciu kilometrów. Jeśli natomiast turbulencja jest silna (to znaczy: jeśli prędkości ruchów chaotycznych są porównywalne z prędkością dźwięku), cienki dysk pyłowy nie wykształca się. W takim przypadku planetozymale powstają wskutek przypadkowego zlepiania się ziaren pyłu chaotycznie krążących po całej objętości dysku, czas zaś potrzebny do ich utworzenia jest znacznie dłuższy i wynosi około stu tysięcy lat.

W toku dalszej ewolucji dysku nieelastyczne zderzenia między planetozymalami prowadzą do powstania protoplanet. Trwająca od dziesięciu do kilkuset milionów lat faza powstawania protoplanet jest najdłuższą z faz ewolucji dysku protoplanetarnego. Planetozymale, które przetrwały ją w nienaruszonym stanie, mogą być obserwowane w uformowanym już układzie planetarnym jako komety lub planetoidy.

Jak zatem widać, według współcześnie rozwijanej teorii dysk protoplanetarny jest kluczowym ogniwem w łańcuchu przemian prowadzących od obłoku materii międzygwiazdowej do otoczonej planetami gwiazdy. Pięknym potwierdzeniem tych teoretycznych przewidywań są prowadzone od kilku lat obserwacje dysków protoplanetarnych, którymi zajmujemy się w dalszej części tego artykułu.

Obecność dysku przy młodej gwiazdzie lub protogwiazdzie najłatwiej jest wykryć prowadząc obserwacje w podczerwieni. Objawia się on jednak wtedy nie jako obiekt o określonym kształcie i rozmiarach, lecz tylko jako „garb” w podczerwonej części widma (rys. 1). Promieniowanie podczerwone po części powstaje w samym dysku kosztem energii grawitacyjnej gazu i pyłu opadającego na ciało centralne, po części zaś jest przetworzonym promieniowaniem ciała centralnego. W miarę wyczerpywania się gazu i pyłu podczerwony garb maleje aż do zupełnego zaniku w widmie dojrzałej gwiazdy z całkowicie już uformowanym układem planetarnym.

Obserwacje w podczerwieni są wymownym, lecz jednak tylko pośrednim dowodem istnienia dysków protoplanetarnych. Dzięki obserwacjom prowadzonym w zakresie widzialnym (przede wszystkim za pomocą

Teraz przechodzimy do granicy po obu stronach poprzedniej równości, wykorzystując zależność

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x - t_k) f'(x) dx = 0.$$

(Czytelnik spróbuje samodzielnie udowodnić, że tak istotnie jest przy założeniu ciągłości f' w $[a, b]$.) Końcowy efekt naszych przygotowań technicznych to wzór

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) \right) = \frac{b-a}{2} (f(a) - f(b)).$$

Podamy teraz kilka jego interesujących zastosowań. Weźmy pod uwagę funkcję $f(x) = \ln \frac{\sin \frac{\pi}{2} x}{x}$ i określmy jej wartości na całym przedziale $[0, 1]$, kładąc $f(0) = \ln \frac{\pi}{2}$. Tak określona funkcja jest ciągła na przedziale $[0, 1]$. Czytelnik zechce sprawdzić, że f ma na $[0, 1]$ również ciągłą pierwszą pochodną. Suma Riemanna funkcji f ma postać

$$(4) \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} \left[\ln \left(\sin \frac{\pi}{2n} \sin \frac{2\pi}{2n} \dots \sin \frac{n\pi}{2n} \right) - \ln \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \dots \frac{n}{n} \right) \right].$$

W dalszym ciągu wykorzystamy dwa znane wzory, które Czytelnik (o ile ich nie zna) może spróbować udowodnić sam lub wyszperać w różnych zbiorach zadań z analizy matematycznej, np. [1] i [2]. Oto one:

$$(5) \quad \sin \frac{\pi}{2n} \sin \frac{2\pi}{2n} \sin \frac{3\pi}{2n} \dots \sin \frac{n\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}.$$

Stosując je do wyrażenia całki funkcji f oraz jej sumy Riemanna, dostaniemy zależności

$$(6) \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} \ln \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}} - \frac{1}{n} \ln \frac{n!}{n^n} = \frac{\ln n}{2n} - \frac{n-1}{n} \ln 2 - \ln \frac{\sqrt[n]{n!}}{n},$$

$$(7) \quad \int_0^1 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = 1 - \ln 2.$$

Obie powyższe równości wstawiamy do wzoru (3) i spokojnie rachując mamy kolejno:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \ln 2 - \frac{1}{2} \frac{\ln n}{n} + \frac{n-1}{n} \ln 2 + \frac{1}{n} \ln \frac{n!}{n^n} \right) = \frac{1}{2} \ln \frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n - \frac{1}{2} \ln n - \ln 2 + \ln \frac{n!}{n^n} - \frac{1}{2} \ln \frac{\pi}{2} \right) = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{e^n n!}{\sqrt{2\pi n} n^n} \right) = 0$$

lub inaczej

$$(8) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}} = 1.$$

Otrzymaliśmy w ten sposób wzór Stirlinga (8) wielokrotnie wykorzystywany w różnych artykułach w *Delcie* (np. na str. 4).

Zastosujmy teraz nasz wzór (3) do funkcji $f(x) = \ln \frac{(1+x) \sin \frac{\pi}{2} x}{x}$ określonej na przedziale $[0, 1]$ (z dodatkową umową, że $f(0) = \ln \frac{\pi}{2}$).

Funkcja ta, podobnie jak poprzednia, jest na przedziale $[0, 1]$ ciągła wraz ze swą pochodną. Bez wdawania się w zbędne szczegóły rachunkowe (Czytelnik w razie potrzeby zdoła je niewątpliwie samodzielnie uzupełnić) powiemy tylko, że suma Riemanna f i jej całka oznaczona wyglądają następująco:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} \ln \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}} - \frac{1}{n} \ln \frac{(n!)^2}{(2n)!},$$

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \ln \frac{\sin \frac{\pi}{2} x}{x} dx + \int_0^1 \ln(1+x) dx = \ln 2,$$

wzór (3) zaś po kosmetycznych zabiegach przybierze tym razem postać

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n} (n!)^2}{\sqrt{n} (2n)!} = \sqrt{\pi}.$$

Powyższy wzór to jedna z postaci znanego wzoru Wallisa wykorzystywanego często w podręcznikowych dowodach wzoru Stirlinga (patrz np. [3]). Tutaj otrzymaliśmy oba wzory niezależnie.

Zastosujmy jeszcze z ciekawości wzór (3) do kilku innych funkcji.

Weźmy, na przykład, $f(x) = \ln \frac{(2+x) \sin \frac{\pi}{2} x}{x}$ określoną na przedziale $[0, 1]$ z $f(0) = \ln \pi$. Rozumowanie podobne do poprzednich prowadzi w tym przypadku do wzoru

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{3n} n! (2n)!}{\sqrt{n} 2^{2n+1} (3n)!} = \sqrt{\frac{\pi}{3}}.$$

Dla $f(x) = \ln \frac{\sin \frac{\pi}{2} x}{x(1+x)}$ na przedziale $[0, 1]$ z $f(0) = \ln \frac{\pi}{2}$ otrzymujemy:

$$(9) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{2n} (2n)!}{2\sqrt{n\pi} (2n)^{2n}} = 1,$$

czyli wzór Stirlinga (8), w którym podstawiono $2n$ zamiast n .

Dla $f(x) = \ln \frac{\sin \frac{\pi}{2} x}{x(2+x)}$ na przedziale $[0, 1]$ z $f(0) = \ln \frac{\pi}{4}$ mamy z kolei

$$(10) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{2n} 2^{2n} (3n)! (n)!}{\sqrt{3n\pi} 3^{3n} (n)^{2n} (2n)!} = 1.$$

Dzieląc stronami (10) przez (9) otrzymujemy jeszcze jeden interesujący wzór

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{4n} (3n)! n!}{3^{3n} ((2n)!)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

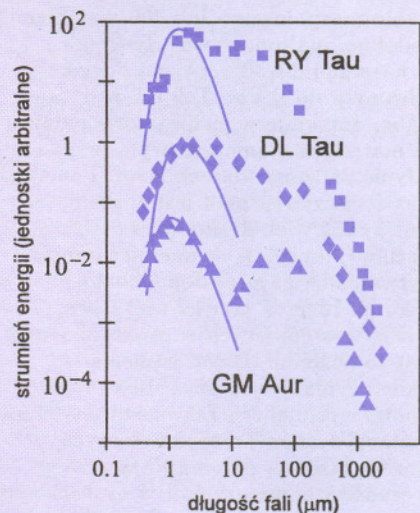
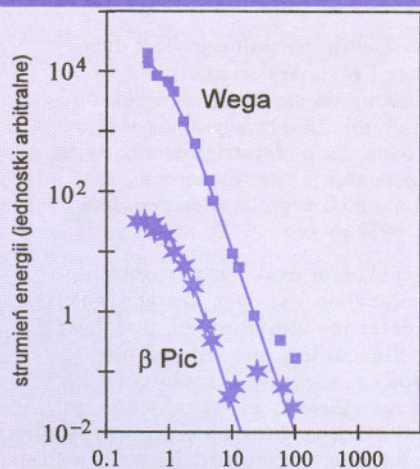
Widać, że wyżej opisany sposób prowadzi do uzyskania wielu ciekawych i użytecznych wzorów. Wyprowadzenie dalszych pozostawiamy inwencji Czytelnika.

Literatura:

[1] J. Banaś, S. Wędrychowicz, *Zbiór zadań z analizy matematycznej*. WNT, Warszawa 1993.

[2] L. Jeśmanowicz, J. Łoś, *Zbiór zadań z algebry*. PWN, Warszawa 1972.

[3] K. Kuratowski, *Rachunek różniczkowy i całkowy*. PWN, Warszawa 1979.



Rys. 1. Podczerwone nadwyżki w widmach układów protoplanetarnych świadczące o obecności dysków akrecyjnych. Liniami ciągłymi oznaczono widma samych obiektów centralnych. teleskopu Hubble'a) oraz w zakresie radiowym przez radioteleskopy pracujące na falach milimetrowych mamy również dowody bezpośrednie: od paru lat niektóre (nieliczne na razie) dyski możemy po prostu oglądać. Piękną kolekcję zdjęć dysków (uzyskaną za pomocą teleskopu Hubble'a) krążących wokół młodych gwiazd i protogwiazd w gromadzie „Trapez” (gwiazdozbiór Oriona) możemy obejrzeć na okładkach. Typowa masa takiego dysku jest zbliżona do tzw. minimalnej masy mgławicy słonecznej, którą otrzymuje się poprzez „uzupełnienie” pierwiastków występujących w naszym układzie planetarnym tak, by ich proporcje wagowe odpowiadały proporcjom obserwowanym na Słońcu, i która wynosi $0,01 M_{\odot}$. Promienie dysków wahają się od kilkudziesięciu do kilkuset jednostek astronomicznych (jedna j.a. jest równa średniemu promieniowi orbity Ziemi). W niektórych przypadkach rozrzedzona materia gazowa i pyłowa bywa jednak obserwowana aż do odległości 2000 j.a.

od obiektu centralnego. Tak duże masy i rozmiary wskazują na to, iż mamy do czynienia z obiektami młodymi, znajdującymi się w fazie akrecji. Na podstawie różnego typu obserwacji można oszacować, iż w młodych gromadach typu Trapez podobne dyski ma 70–80% gwiazd.

Przykładem dysku zaawansowanego ewolucyjnie jest dysk krążący wokół w pełni już uformowanej, podobnej do Słońca, lecz znacznie od niego młodszej gwiazdy β Pictoris (β Pic). Po raz pierwszy sfotografowano go w 1984 r., niedawno zaś jego nowe zdjęcia o znacznie lepszej rozdzielczości nadesłał teleskop Hubble'a. Całkowita masa dysku β Pic nie przekracza $10^{-3} M_{\odot}$ (około masy Jowisza lub 300 mas Ziemi). Podobne, mało masywne dyski ma co najmniej 20–30% gwiazd o wieku zbliżonym do β Pic. Tak jak w dysku β Pic, dominuje w nich materia pyłowa; na materię w stanie gazowym przypada jedynie znikomy ułamek masy. Ponieważ czas życia ziaren pyłu jest znacznie krótszy niż wiek dysku typu β Pic, musimy przyjąć, iż są one nieustannie wytwarzane, najprawdopodobniej wskutek zderzeń jakichś większych, licznie występujących w dysku obiektów. Jest to pośredni dowód istnienia planetozymali, a zatem i słuszności hipotez opisujących zaawansowane etapy ewolucji dysków protoplanetarnych. Inną wskazówką przemawiającą za obecnością planetozymali w dyskach typu β Pic są nieregularnie powtarzające się rozbłyski w liniach widmowych niektórych pierwiastków, jakie zaobserwowano w samej β Pic. Jak wynika z obliczeń teoretycznych, takie właśnie rozbłyski towarzyszą zderzeniom planetozymali z gwiazdą centralną. Mamy też powody, by przypuszczać, iż dysk β Pic wszedł już w fazę formowania planet. W swej wewnętrznej części jest on mianowicie wyraźnie wygięty – w taki sposób, jakby podlegał na zakłóceniom grawitacyjnym generowanym przez okrążający gwiazdę centralną obiekt o masie zbliżonej do masy Jowisza.

Fakt, iż starsze dyski są wyraźnie mniej masywne od młodych, jednoznacznie wskazuje na działanie przewidzianych przez teorię procesów prowadzących do utraty masy z dysku. W swej obecnej postaci teoria nie jest jednak w stanie ani przewidzieć tempa utraty masy, ani nawet jednoznacznie wskazać procesów za tę utratę odpowiedzialnych. Zgodnie z obserwacjami etap ewolucji, na którym dochodzi do intensywnej utraty masy, przypada na początek fazy akrecji. Jest to etap niezmiernie ciekawy z teoretycznego punktu widzenia i bardzo ważny z punktu widzenia ewolucji układu planetarnego (bez znaczącej utraty masy z dysku obiekt

Probabilistyka i wybory

W *EPSILONIE* (70) w *Delcie* 1/1997 można przeczytać obszerny tekst Krzysztofa Ciesielskiego o niebezpieczeństwach płynących z nieumiejętnego interpretowania danych statystycznych. Podane przykłady dotyczą m.in. ostatnich wyborów prezydenckich; dorzucmy do nich swoje trzy grosze.

Z drugą turą wspomnianych wyborów wiąże się probabilistyczna ciekawostka. Otóż pewien znany polityk – dla krótkości nazwijmy go X – stwierdził, że nie widzi powodu, by brać udział w drugiej turze wyborów, skoro prawdopodobieństwo, że to właśnie jego głos rozstrzygnie o wyniku, jest równe $1/17\,000\,000$. Co X miał na myśli? Po chwili namysłu stwierdzamy, iż musiał przyjąć, że wyborcy są nierozróżnialni. Dla polityka to bardzo naturalne założenie – w ostatecznym rachunku jest mu bowiem wszystko jedno, czy wygrywa głosami profesorów, urzędników administracji średniego szczebla, czy też np. gospodyń wiejskich i cyklistów. A skoro wyborcy są nierozróżnialni, to drugie równie naturalne założenie mówi, że wszystkie wyniki drugiej tury wyborów mają równe prawdopodobieństwa. Gdy wyborców jest 17 mln (taką mniej więcej liczbę głosujących przewidywano przed drugą turą), to wyników jest $17\,000\,001$. Zatem istotnie, prawdopodobieństwo, że obaj kandydaci otrzymają równe liczby głosów, a wybory będą nierozstrzygnięte (o ile X nie pofatyguje się na spacer do urny), jest przy powyższych założeniach równe $1/17\,000\,000$ z dokładnością do cztertnastu miejsc po przecinku.

Dla większości z nas założenie o nieodróżnialności wyborców jest jednak dość absurdalne. W końcu nieomal wszystkim żona nie myli się z teściową, a własne dziecko z jego nauczycielką matematyki. Są nawet tacy, którym polityk X nie myli się z politykiem Y (choć nie wiem, czy nadal można tu mówić o *większości*).

Przyjmijmy przeto inny model probabilistyczny: każdy z 17 mln wyborców oddaje głos niezależnie od pozostałych, wybierając z prawdopodobieństwem $1/2$ jednego z dwóch kandydatów. Mamy więc do czynienia ze schematem 17 mln prób Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu (albo, jak będą chcieć niektórzy, porażki) równym $1/2$. Jakie teraz jest prawdopodobieństwo p zdarzenia polegającego na tym, że obaj kandydaci otrzymają równe liczby głosów? Jak wie tzw. każdy młody człowiek,

$$p = \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}}, \quad \text{gdzie } n = 17\,000\,000 : 2 = 8\,500\,000.$$

No dobrze, ale ILE to właściwie jest? Gdy do przybliżenia silni wykorzystamy przypomniany na str. 2 wzór Stirlinga, to okaże się, że

$$p = 0,000193515\dots \simeq 0,0002.$$

Wynik jest więc zaskakująco duży (zalecam przepytanie tych znajomych, którzy wiedzą dobrze, co to schemat Bernoulliego; dla mnie było to doświadczenie ciekawe pod względem zarówno różnorodności uzyskanych odpowiedzi, jak i stopnia ich nietrafności). Gdy nieco skomplikujemy nasz model i przyjmiemy, że liczba wyborców należy do przedziału – powiedzmy – $(16 \cdot 10^6, 18 \cdot 10^6)$ i może być z równym prawdopodobieństwem parzysta lub nieparzysta, to p , oczywiście, zmaleje, ale tylko około dwóch razy. Wynik będzie więc i tak ponad tysiącrotnie większy od postulowanego przez X -a.

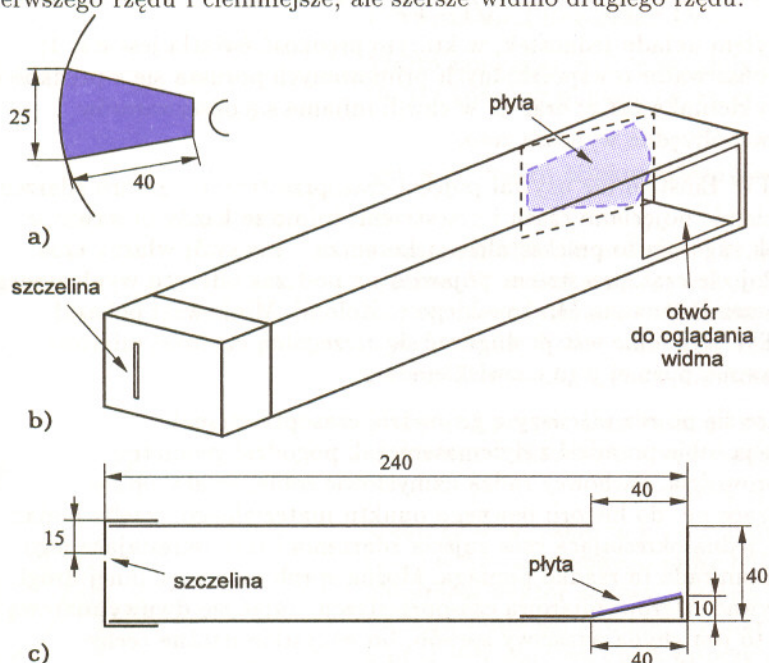
A jak to jest *naprawdę*? Któż to wie... Kłopoty ze stosowaniem rachunku prawdopodobieństwa polegają m.in. na tym, że na takie pytania żaden odpowiedzialny matematyk nie odpowie w wiążący sposób. Jeśli zaś odpowiada, to znaczy, że zamiast matematyką chwilowo zajęł się filozofią.

P.S.

Spektroskop za złotówkę

Płyta kompaktowa działa jak siatka dyfrakcyjna. Gołym okiem widać na niej „tęcze” powstające w świetle odbitym.

Bardzo łatwo zrobić sobie z takiej płyty spektroskop. Wystarczy wyciąć z niej piłką do metalu cząstkę (rys. a) i umieścić ją w pudełku wykonanym z cienkiej tekturki lub grubego czarnego kartonu, tak jak to przedstawiają rysunki b i c. Pudełko sklejaemy lub spinamy zszywaczem. Kawalek płyty przylepimy do podłoża – za brzeżki! – cienkimi paseczkami taśmy klejącej. Szczelinę – na przykład o szerokości 0,5 mm – można wyciąć w tekturce żyletką lub ostrym nożem. Wygodnie umieścić ją na dodatkowej pokrywie – w ten sposób można wykonać kilka wymiennych szczelin o różnych szerokościach (rys. b). Jeżeli zachować w przybliżeniu wymiary przedstawione w milimetrach na rysunku c, przez otwór będzie można oglądać dwa widma: jaśniejsze, mniej rozciągnięte widmo pierwszego rzędu i ciemniejsze, ale szersze widmo drugiego rzędu.



Ponieważ przeceniona płyta kompaktowa kosztuje poniżej 10 złotych, a można z niej zrobić 10 takich spektroskopów, pojedynczy egzemplarz kosztowałby właśnie około jednej złotówki. Stąd – może nie do końca uczciwy – tytuł.

W warunkach domowych można za pomocą naszego spektroskopu przeprowadzić następujące badania:

1. Obejrzeć widmo ciągłe żarówki. Najwygodniej użyć żarówki matowej albo patrzeć na żarówkę zwykłą przez torebkę foliową – aby rozmazać obraz włókna.
2. Obejrzeć widmo Słońca – także patrząc na nie przez folię plastikową. W widmie drugiego rzędu widać ślady prążków Fraunhofera.
3. Obejrzeć widmo liniowe świetlówki.
4. Zbadać absorpcję kolorowych celofanów. Jako źródła użyjemy matowej żarówki, a badane próbki umieszczamy przed szczeliną przyrządu. Można przy tym zasłaniać tylko połowę szczeliny, aby móc porównać widmo światła przechodzącego przez absorber z widmem odniesienia.

Nasz spektroskop jest, niestety, dość ciemny i nie nadaje się do oglądania widma neonówki czy typowych szkolnych rurek Geisslera.

Jerzy GINTER

centralny najprawdopodobniej nie mógłby przekształcić się w gwiazdę). Jak za chwilę zobaczymy, dla obserwatora zewnętrznego jest to także etap bardzo malowniczy.

W wielu (prawdopodobnie we wszystkich) przypadkach wpływ masy z dysku prowadzi do uformowania się dwóch wąskich (skolimowanych) strug gazu, które ciągle jeszcze nie mają polskiej nazwy i które chcąc nie chcąc musimy za literaturą fachową nazywać dżetami (ang. *jets*). Najwyraźniej widać to w układzie protoplanetarnym oznaczonym symbolem HH30 (fot. na przedniej okładce). Dzięki jego obserwacjom wiadomo, iż dżety powstają w wewnętrznych częściach dysków, blisko obiektu centralnego. Na ile blisko – tego na razie nie wiemy; w układzie HH30 na pewno bliżej niż 15 j.a. Wiadomo również, że mechanizm zasilający dżety nie przez cały czas pracuje z jednakową wydajnością; zamiast ciągłej strugi materii (lub na jej tle) obserwujemy bowiem szereg mgławicowatych tworów nazywanych w fachowej literaturze węzłami (ang. *knots*).

Najjaśniejsze węzły niektórych ze znanych dziś dżetów zostały zaobserwowane już prawie pół wieku temu przez George'a Herbiga i Guillermo Haro i otrzymały nazwę obiektów Herbiga-Haro (w skrócie – obiektów HH). Wówczas nie zdawano sobie jednak sprawy ani z istnienia dżetów, ani nawet z tego, że obiekty HH są ściśle związane z młodymi gwiazdami. Tradycyjne nazwy węzłów bywają dziś rozciągane na całe dżety, a nawet, jak w przypadku HH30, na całe układy protoplanetarne.

Porównując zdjęcia wykonane w odstępie co najmniej kilku miesięcy można zaobserwować przemieszczanie się węzłów. Stąd oraz z obserwacji spektroskopowych wiadomo, iż gaz płynący w dżecie oddala się od centrum dysku z prędkościami dochodzącymi do paruset km/s (bliskimi prędkości ucieczki z powierzchni obiektu centralnego). Dzięki takim prędkościom dżety i stowarzyszone z nimi łańcuszki węzłów – obiektów Herbiga-Haro – osiągają bardzo duże odległości od centrów swych macierzystych dysków (do 9 lat świetlnych w przypadku dżetu HH11; przypomnijmy, iż jest to kilkaset razy więcej niż promień dużego dysku protoplanetarnego). Niestety, ciągle jeszcze nie wiemy, co rozpędza dżety do tak dużych prędkości ani co sprawia, iż są one tak wąskie. Najprawdopodobniej w obu przypadkach istotną rolę odgrywają pola magnetyczne. Obserwacje dżetów, w których widać więcej szczegółów niż w HH30 (np. HH34 i HH47 pokazanych na fotografiach na okładce), pozwalają jednak już dzisiaj na zidentyfikowanie takich cech przepływu gazu, które w niedalekiej perspektywie mogą pomóc w rozwiązaniu obu zagadek.