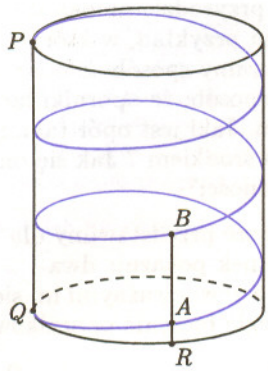
Cztery sposoby obliczenia długości linii śrubowej

Zajmiemy się następującym pouczającym zadaniem.

Obliczyć długość linii określonej w sposób parametryczny równaniami

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad z = ct\,,$$

gdzie a, c to dodatnie stałe, natomiast $t \in [0, 6\pi]$.

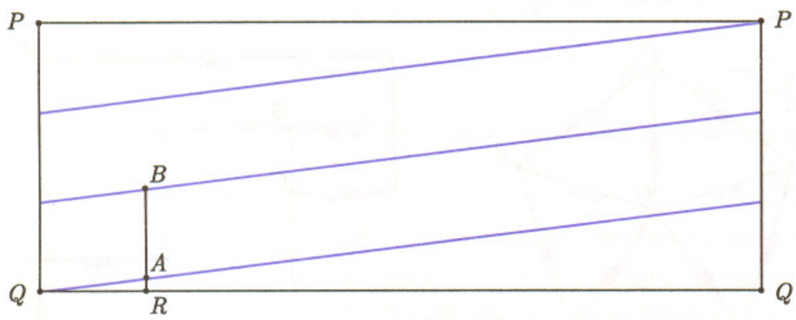


Rys. 1. Długość łuku QR jest równa at, $RA = ct$, $AB = c\cdot 2\pi$.

Oto rozwiązanie, a raczej kilka różnych rozwiązań. Parametr t interpretujemy jako czas. Punkt (x, y, z) porusza się po walcu. Po upływie czasu t punkt znajdzie się w A na wysokości ct. Po upływie kolejnych 2π jednostek czasu punkt znajdzie się w B na wysokości $c(t+2\pi)$. Stąd $AB = c2\pi$. Zatem zwoje spirali są odległe o $c2\pi$.

Pierwszy sposób. Rozcinamy walec wzdłuż linii PQ (patrz rys. 2). Powstaje prostokąt o podstawie długości $2\pi a$. Zwoje spirali przechodzą na odcinki, bo $\frac{ct}{at} = \frac{c}{a} = \text{const}$. Stąd wynika, że szukana długość linii śrubowej to

$$3\sqrt{4\pi^2a^2 + 4\pi^2c^2} = 6\pi\sqrt{a^2+c^2}\,.$$



Rys. 2

Drugi sposób. Wektor wodzący poruszającego się punktu ma postać

$$\vec{r}(t) = [a\cos t, a\sin t, ct]\,.$$

Prędkość $\vec{v}(t)$ końca wektora w chwili t znajdujemy różniczkując $\vec{r}(t)$ względem t,

$$\vec{v}(t) = [-a\sin t, a\cos t, c]\,.$$

Zatem szybkość końca wektora $\vec{r}(t)$ w chwili t wynosi

$$v(t) = \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2 + c^2} = \sqrt{a^2+c^2} = \text{const}\,.$$

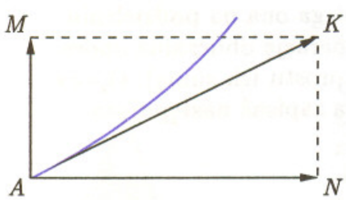
Teraz szukaną długość linii śrubowej obliczamy ze wzoru

$$\text{Droga} = \text{czas}\cdot\text{szybkość} = 6\pi\sqrt{a^2+c^2}\,.$$

Trzeci sposób. Prędkość punktu w chwili t, tj. w punkcie A, jest wypadkową prędkości obrotowej i prędkości podnoszenia.

Mamy (patrz rys. 3) $\overrightarrow{AK} = [a, c]$ i $AK = \sqrt{a^2+c^2} = \text{const}$. Stąd, jak przed chwilą,

$$\text{Droga} = \text{czas}\cdot\text{szybkość} = 6\pi\sqrt{a^2+c^2}\,.$$



Rys. 3.
$\overrightarrow{AM}$ – prędkość podnoszenia,
$\overrightarrow{AN}$ – prędkość obrotowa,
$\overrightarrow{AK}$ – prędkość wypadkowa,
szybkość podnoszenia

$$AM = \frac{ct}{t} = c\,,$$

szybkość obrotowa

$$AN = \frac{at}{t} = a\,.$$

Czwarty sposób. Długość linii obliczamy całkując szybkość poruszającego się punktu.

$$\text{Długość linii} = \int_0^{6\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{6\pi} \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2 + c^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{6\pi} \sqrt{a^2+c^2}\,\mathrm{d}t = 6\pi\sqrt{a^2+c^2}\,.$$

Robert HAJŁASZ