Zaskakujące własności prawdopodobieństwa warunkowego

Jacek JAKUBOWSKI

Prawdopodobieństwo warunkowe jest zdefiniowane wzorem $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ dla takich zdarzeń B, że $P(B) > 0$. Definicja jest naturalna, ma wiele „porządnych" własności i wiele zastosowań. Ale ma też własności, które przeczą potocznym wyobrażeniom i są bardzo zaskakujące dla większości osób. Niezdawanie sobie z nich sprawy prowadzi do błędnych rozumowań. Pokażę tu trzy przykłady takich zaskakujących własności.

Dla prostoty załóżmy, że przestrzeń zdarzeń elementarnych jest zbiorem skończonym.

Własność 1

$$P(A|B) > P(A) \Longleftrightarrow P(B|A) > P(B)\,, \tag{1}$$

gdyż każda strona jest równoważna nierówności $P(A \cap B) > P(B)P(A)$.

Gdy nierówność $P(A|B) > P(A)$ będziemy interpretowali w ten sposób, że zajście zdarzenia B zwiększa szansę zajścia zdarzenia A (co wydaje się sensowną interpretacją), to (1) oznacza, że zajście zdarzenia B zwiększa szansę zajścia zdarzenia A wtedy i tylko wtedy, gdy zajście zdarzenia A zwiększa szansę zajścia zdarzenia B. Jest to sprzeczne z intuicją wielu osób, którym wydaje się, że jeśli B zwiększa szansę zajścia A, to A zmniejsza szansę zajścia B.

Korzystając z (1) widzimy bez obliczania, że prawdopodobieństwo tego, iż w grze w brydża gracz A ma asa pik (zdarzenie A), jeśli wiemy, że ma co najmniej jednego asa (zdarzenie B), jest większe od bezwarunkowego prawdopodobieństwa, że ma asa pik (gdyż $P(B|A) = 1$ i korzystamy z (1)).

Z (1) związane są także inne zaskakujące dla nas własności, np. jeśli D zwiększa szansę zajścia A i D zwiększa szansę zajścia B, to wcale nie wynika z tego, że D zwiększa szansę zajścia $A \cap B$. Przykładem takiej sytuacji może być doświadczenie polegające na wyciągnięciu jednej karty z talii 52 kart. Niech zdarzenie A polega na wyciągnięciu pika lub kiera, zdarzenie B polega na wyciągnięciu trefla lub kiera, natomiast zdarzeniu D sprzyja wyciągnięcie asa lub króla kier, lub trefla nie będącego asem, lub pika nie będącego asem (proszę wykazać, że $P(A|D) > P(A)$, $P(B|D) > P(B)$ i $P(A \cap B|D) < P(A \cap B)$).

Własność 2

Niech A, B, C będą takimi zdarzeniami, że $C \subset A \cap B$ i B nie zawiera się w A. Wtedy

$$P(C|A) > P(C|A \cup B)\,.$$

(ta nierówność jest prostą konsekwencją definicji i tego, że $P(A) < P(A \cup B)$). W szczególności, gdy wiemy, że zaszło A, to prawdopodobieństwo warunkowe, że zaszło $A \cap B$, jest większe, niż gdy wiemy, że zaszło A lub zaszło B, lub zaszły oba naraz.

Korzystając z tego widzimy bez obliczania, że w grze w brydża prawdopodobieństwo zdarzenia, że gracz A ma 4 asy, jeśli wiemy, że ma asa pik, jest większe od prawdopodobieństwa, że gracz A ma 4 asy, jeśli wiemy, że ma co najmniej jednego asa.

Ta własność, znana wśród matematyków grywających w brydża pod nazwą *paradoksu drugiego asa* (równie dobrze można tu bowiem mówić nie o 4, tylko o 2 asach), była ponad osiemdziesiąt lat temu przyczyną nieporozumienia między egzaminatorami na Wydziale Matematyki Uniwersytetu w Cambridge. Można o tym przeczytać w *A mathematician's miscellany* Johna Edensora Littlewooda. *Red.*

Inny przykład: Wybieramy jedną rodzinę spośród rodzin z dwojgiem dzieci. Prawdopodobieństwo zdarzenia, że wybierzemy rodzinę z dwoma chłopcami, jeśli wiemy, że w wybranej rodzinie jest chłopiec, jest mniejsze od prawdopodobieństwa zdarzenia, że w wybranej rodzinie jest dwóch chłopców, jeśli wiemy, że starsze dziecko jest chłopcem.

Własność 3

Paradoks Simpsona

Może zachodzić:

(2) $$P(A|B) < P(A|B')$$

i jednocześnie

(3) $$P(A|B \cap C) \geq P(A|B' \cap C), \qquad P(A|B \cap C') \geq P(A|B' \cap C').$$

A', B', C' oznaczają zdarzenia przeciwne do A, B i C. Wydaje się to sprzeczne z intuicją, gdyż ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite $P(A|B)$ jest średnią ważoną z $P(A|B \cap C)$ i $P(A|B \cap C')$, a $P(A|B')$ jest średnią ważoną z $P(A|B' \cap C)$ i $P(A|B' \cap C')$. Ale odpowiednie wagi mogą być różne i w rezultacie (2) i (3) mogą zachodzić jednocześnie. Gdy zdarzenia B i C są niezależne, to ten paradoks nie może zajść. Paradoks pokazuje, z jak wielką uwagą i ostrożnością powinniśmy stosować wnioskowanie oparte na prawdopodobieństwie warunkowym. Słownie można sformułować paradoks w następujący sposób:

Może się zdarzyć sytuacja, że w mieście X jest większa umieralność chorych na raka niż w mieście Y, a mimo to dla chorych kobiet większa umieralność jest w mieście Y i dla chorych mężczyzn także większa umieralność jest w mieście Y.

Zadania

Redaguje Krzysztof OLESZKIEWICZ

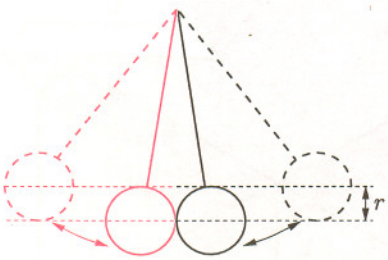
M 810. Pewna bakteria z prawdopodobieństwem p po upływie sekundy dzieli się na dwie bakterie potomne, natomiast z prawdopodobieństwem $1-p$ po upływie tej sekundy ulega naturalnemu rozkładowi. Każda z bakterii potomnych podlega podobnym prawom rozmnażania. Obliczyć wartość oczekiwaną liczby potomstwa tej bakterii po n sekundach.
Rozwiązanie na str. 9

M 811. Udowodnić, że jeśli $p < \frac{1}{2}$, to potomstwo naszej bakterii z prawdopodobieństwem 1 wyginie po upływie jakiegoś czasu.
Rozwiązanie na str. 16

M 812. Obliczyć prawdopodobieństwo wyginięcia potomstwa naszej bakterii po upływie pewnego czasu, jeśli $p \geq \frac{1}{2}$.
Rozwiązanie na str. 9

Redaguje Piotr ZALEWSKI

F 453. W trakcie pokazu fizycznego dokonano elektronicznego pomiaru czasu $\Delta t = 200\ \mu s$, w którym zderzające się kulki o promieniu r (patrz rysunek) stykają się. Oszacować średnią siłę, z jaką działają one na siebie w czasie zderzenia (gęstość stali przyjąć równą $\rho = 7{,}5\ g/cm^3$).
Rozwiązanie na str. 16



Zadanie zaproponowane przez Michała Pawlaka na podstawie pokazu przeprowadzonego w ramach kursu „Wstępu do Fizyki” na Wydziale Fizyki UW.

F 454. Dowcip z brodą:
Kanonier dostał rozkaz przeniesienia za jednym razem trzech pocisków przez dość długą kładkę.
– *Obywatelu działonowy, melduję, że kładka nie wytrzyma więcej niż ciężar mój i najwyżej jednego pocisku!*
– *Więc wykonajcie rozkaz żonglując, żołnierzu!*
Czy rzeczywiście można zmniejszyć maksymalny nacisk na podłoże przez żonglowanie?
Rozwiązanie na str. 16