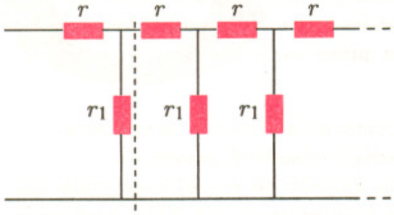
Sieci elektryczne i liczby Fibonacciego

Krzysztof REJMER

Obliczanie oporu zastępczego układu oporników to chyba najbardziej nudne i mechaniczne zadanie, jakie można spotkać w fizyce. Istnieje jednak i tu kilka problemów niewiele wykraczających poza rutynę szeregowych i równoległych połączeń, a mimo to o zaskakujących rozwiązaniach. Choć nie są one nowe, to jednak chyba na tyle rzadko dyskutowane, by warto było o nich wspomnieć w *Delcie*.



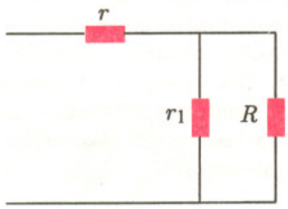
Rys. 1

Rozważmy nieskończoną sieć oporników pokazaną na rysunku 1. Jeśli oderwiemy pierwsze dwa, znajdujące się na lewo od linii przerywanej, sieć pozostanie taka sama, a więc jej opór zastępczy R także nie zmieni się. Rysunek 2 pokazuje sposób, w jaki można go obliczyć. Jest on pierwiastkiem równania

$$R = r + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{r_1}},$$

które można przepisać w postaci równania kwadratowego. Jego fizycznym rozwiązaniem jest

$$R = \frac{r}{2}\left(1 + \sqrt{1 + 4a}\right),$$



Rys. 2

gdzie $a = \frac{r_1}{r}$. Jeśli oba opory, r i r_1, mają jednakową wartość, to $a = 1$ i opór zastępczy jest równy

$$R = r\tau,$$

gdzie $\tau = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{5}\right)$ jest współczynnikiem złotej proporcji. Pozostańmy przez chwilę jeszcze przy tym szczególnym przypadku jednakowych oporów. Zauważmy najpierw, że wystarczy rozważyć sieć zbudowaną z oporników o jednostkowym oporze. Jeśli opór pojedynczego opornika jest równy r, to opór zastępczy takiej sieci jest po prostu r razy większy od oporu zastępczego sieci zbudowanej z jednostkowych oporników; wynika to z analizy wymiarowej. Opór zastępczy takiej sieci możemy obliczyć w inny sposób, wykorzystując własności ciągu Fibonacciego.

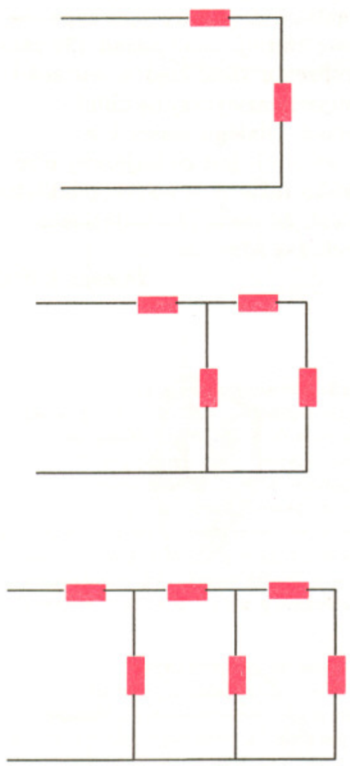
Rozważmy pokazany na rysunku 3 ciąg skończonych sieci, z których każda następna powstaje w wyniku dołączenia do poprzedniej dwóch dodatkowych oporników. Opory zastępcze tych sieci są równe

$$R_1 = 1 + 1 = \frac{2}{1},$$

$$R_2 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{R_1}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+1}} = \frac{5}{3},$$

$$R_3 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{R_2}} = \frac{13}{8},$$

....


Rys. 3

Łatwo zauważyć, że jest to podciąg ciągu stosunków kolejnych liczb Fibonacciego $\frac{F_{n+1}}{F_n}$

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \ldots,$$

zbieżnego do współczynnika złotej proporcji, gdy $n \to \infty$. Gdy rozbudowujemy w ten sposób do nieskończoności sieć oporników o jednostkowym oporze, także jej opór zastępczy dąży do wartości równej τ.

Podobne zagadnienie można przedyskutować dla sieci zawierającej powtarzające się sekwencje zbudowane z dwóch dowolnych impedancji, niekoniecznie rzeczywistych oporów. Nie jest to już wtedy całkiem akademicki problem, gdyż taka sieć może być modelem sieci przesyłowej.

Powyższy przykład nie jest jedynym przykładem sieci elektrycznej, w którego rozwiązaniu pojawia się współczynnik złotej proporcji i liczby Fibonacciego, ale o tym opowiemy przy innej okazji.