

Patrz w niebo

Szanowna Redakcjo!

Z dużą ciekawością przeczytałem artykuł o kryptografii zamieszczony w numerze marcowym. Postanowiłem spróbować rozwiązać problem postawiony przez Autora na marginesie zasadniczego tekstu artykułu, czyli podać rozkład na czynniki liczby n , a także wartości liczb $\phi(n)$ oraz d .

W artykule podano, że

$$n = 245432656233769542083107,$$

a zatem

$$p = 435635644373$$

i

$$q = 563389748759.$$

Wobec tego

$$\begin{aligned}\phi(n) &= 245432656233770516689976 = \\ &= 2^3 \cdot 103 \cdot 127 \cdot 191 \cdot 21534659 \cdot 570203723.\end{aligned}$$

Stąd zaś

$$d = 56638305284485503851533.$$

Mamy bowiem

$$\begin{aligned}13 \cdot 56638305284485503851533 - \\ - 3 \cdot 245432656233770516689976 = 1.\end{aligned}$$

Problem był niezbyt trudny, ale dość ciekawy.

Serdeczne pozdrowienia
Waldemar GORZKOWSKI
Warszawa, 97-02-28

Chyba każde doniesienie o obecności wody gdzieś we Wszechświecie budzi podejrzenie, że może tam właśnie są warunki sprzyjające życiu. Woda jest wszak jednym z podstawowych składników organizmów żywych – w każdym razie, tylko takie organizmy znamy. Jednak aby życie mogło zaistnieć, woda musi występować w stanie płynnym, a to możliwe jest w niezmiernie wąskim, jak na warunki kosmiczne, zakresie temperatur. Tymczasem poza Ziemią w Układzie Słonecznym woda jest na ogół zamrożona, np. na satelitach Jowisza, w kometach, czy nawet w wiecznie ocienionych miejscach na Merkury. Nawet na Marsie sezonowe pojawianie się i zanikanie czap polarnych nie oznacza, że woda dosłownie przepływa z jednego bieguna na drugi. Może tak było w zamierchłej przeszłości, lecz obecnie lód na ogrzewającym się biegunie sublimuje, woda w postaci gazowej przenoszona jest przez wiatr na przeciwny biegun i tam się osadza.

Para wodna jest jedną z substancji zdolnych do przejawiania zjawiska maserowego. W ośrodku takim możliwa jest mianowicie tzw. inwersja obsadzeń poziomów energetycznych, tzn. w stanie o energii wyższej może znaleźć się więcej cząsteczek niż w stanie o energii niższej, co więcej – zachodzi to w temperaturze, w której zasadniczo tak być nie powinno. Inwersja obsadzeń osiągnana jest w wyniku tzw. pompowania, czyli zazwyczaj oświetlenia ośrodka przez jakieś zewnętrzne źródło. Gdy ośrodek jest już „napompowany”, wtedy foton o określonej częstotliwości (innej niż częstość promieniowania pompującego) może wymusić przejście jakiejś cząsteczki do stanu niższego z jednoczesnym wyświeceniem identycznego fotonu, mającego tę samą częstość, fazę i kierunek. Z kolei te dwa fotony mogą zmusić dwie inne cząsteczki do wyświecenia dwóch następnych identycznych fotonów itd. Tak rozwija się w ośrodku zjawisko maserowe (słowo maser to skrót od Microwave Amplification by Stimulated Emission of Radiation), mikrofalowy odpowiednik zjawiska laserowego dla światła (a słowo laser to skrót od Light Amplification. . . i dalej tak samo).

Najodleglejszym obiektem, o którym wiadomo, że zawiera wodę, jest aktywna galaktyka Markarian 1, leżąca w Rybach w odległości 60 Mpc. Woda ta, oczywiście, znajduje się tam w formie nie sprzyjającej życiu, a odkryta została w wyniku zaobserwowania mikrofalowej linii emisyjnej charakterystycznej dla wodnego masera. Maser ten zasilany jest przez aktywne jądro galaktyki (zawierające zapewne masywną czarną dziurę) i w tej jednej linii mikrofalowej emituje moc ponad 130 razy przewyższającą całkowitą moc Słońca. Jest to w przybliżeniu sześć rzędów wielkości więcej od przeciętnej mocy kosmicznych maserów, którymi zazwyczaj są obłoki rozproszonej materii położone w pobliżu gorących gwiazd. Dlatego maser taki bywa żargonowo nazywany „megamaserem”. Obecnie znanych jest co najmniej pięć megamaserów. Nie wiadomo dokładnie, dlaczego zjawisko takie w pewnych galaktykach zachodzi, a w innych nie, natomiast można przypuszczać, że woda jest związkiem występującym we Wszechświecie obficie, niż się dotychczas zdawało.

Tomasz KWAST



Rozwiązanie zadania M 810. Niech X_n będzie zmienną losową oznaczającą liczbę bakterii po upływie n sekund, Y_1, Y_2, \dots zaś niech będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie, przyjmującymi z prawdopodobieństwem p wartość 2, natomiast z prawdopodobieństwem $1 - p$ wartość 0. Wówczas $EX_0 = 1$, a dla $n \geq 1$ mamy

$$\begin{aligned}EX_n &= E(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{X_{n-1}}) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} E(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_k) \cdot P(X_{n-1} = k) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (EY_1 + EY_2 + \dots + EY_k) \cdot P(X_{n-1} = k) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} EY_1 \cdot kP(X_{n-1} = k) = \\ &= EY_1 \sum_{k=0}^{\infty} kP(X_{n-1} = k) = 2p \cdot EX_{n-1}.\end{aligned}$$

Zatem $EX_n = (2p)^n$.



Rozwiązanie zadania M 812. Oznaczmy przez q_n prawdopodobieństwo wyginięcia potomstwa bakterii nie później niż po n sekundach. Wówczas $q_0 = 0$, a dla $n \geq 1$ mamy ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite $q_n = pq_{n-1}^2 + (1-p)$. Oczywiście, q_n jest ciągiem niemalejącym, ograniczonym z góry przez 1, więc zbieżnym do pewnej liczby $g \in [0, 1]$. Przechodząc do granicy w rekurencyjnym wzorze na q_n dostajemy $g = pg^2 + 1 - p$. Stąd $g = 1$ lub $g = (1-p)/p \leq 1$. Przez indukcję łatwo dowodzimy, że $q_n \leq (1-p)/p$ dla wszystkich n naturalnych, stąd $g \leq (1-p)/p$, toteż ostatecznie $g = (1-p)/p$ jest szukanym prawdopodobieństwem.

Uwaga. Wnikliwy Czytelnik może zechcieć rozważyć bardziej złożony model reprodukcji, gdy każda z bakterii z prawdopodobieństwem p_0 ginie nie pozostawiając potomstwa, z prawdopodobieństwem p_1 żyje dalej, z prawdopodobieństwem p_2 dzieli się na dwie potomne, z prawdopodobieństwem p_3 na trzy itd. Okazuje się, że wówczas warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, by bakterie wyginęły z prawdopodobieństwem 1 po pewnym czasie, jest $1 \geq \sum kp_k$ (wartość oczekiwana liczby potomków jednej bakterii po jednej sekundzie nie przekracza 1) i $p_0 > 0$. Podobny model stosuje się do bardziej związanych z rzeczywistym światem zagadnień, np. dziedzinienia nazwisk w linii męskiej lub DNA mitochondrialnego w linii żeńskiej.