Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VIII 1997

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 327 (WT=1,94), 328 (WT=3,23),
z numeru 10/1996

Krzysztof Zapisek	– Warszawa	40,70
Piotr Żmijewski	– Łódź	39,15
Bartłomiej Dyda	– Wrocław	36,33
Jarosław Łazuka	– Warszawa	33,94

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1997.

Zadania z matematyki nr 343, 344

Redaguje Marcin E. KUCZMA

343. Niech $(g(n) : n = 1, 2, 3, \ldots)$ będzie rosnącym ciągiem wszystkich dodatnich liczb całkowitych, które nie są kwadratami liczb całkowitych (np. $g(1) = 2$, $g(4) = 6$, $g(13) = 17$, itd.). Dla liczby rzeczywistej x oznaczmy przez $r(x)$ jedyną liczbę całkowitą leżącą w przedziale $\langle x - \frac{1}{2}; x + \frac{1}{2})$. Dowieść, że $g(n) = n + r(\sqrt{n})$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$.

344. Obliczyć kres dolny zbioru liczb będących sumami szeregów postaci

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n^2}{a_{n+1}}, \text{ gdzie } a_0 = 1,\ a_{n-1} \geq a_n > 0 \text{ dla } n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Zadanie **344** zaproponował pan Marcin Kasperski z Warszawy.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 2/1997

Przypominamy treść zadań:

335. Na bokach AB i AC trójkąta ABC o polu S i obwodzie $2p$ odłożono (odpowiednio) odcinki AK, AL o długościach k, l. Pole trójkąta AKL wynosi S'. Udowodnić, że prosta KL przechodzi przez środek okręgu wpisanego w trójkąt ABC wtedy i tylko wtedy, gdy $2pS' = (k+l)S$.

336. Ciąg (a_n) jest określony wzorami: $a_1 = 3$, $a_{n+1} = a_n^2 - 2$ dla $n \geq 1$. Dowieść, że każdy jego wyraz jest równy ilorazowi pewnych dwóch wyrazów ciągu Fibonacciego (określonego wzorami: $u_1 = u_2 = 1$, $u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$ dla $n \geq 1$).

335. Prosta KL przecina dwusieczną kąta A w punkcie P dzielącym odcinek KL w stosunku $k : l$, czyli będącym środkiem ciężkości układu dwóch mas punktowych: masy l umieszczonej w punkcie K i masy k umieszczonej w punkcie L. Wobec tego

$$\overrightarrow{AP} = \frac{l}{k+l} \cdot \overrightarrow{AK} + \frac{k}{k+l} \cdot \overrightarrow{AL}\,.$$

Przy zwykłych oznaczeniach $a = |BC|$, $b = |CA|$, $c = |AB|$ dostajemy stąd równość

$$\overrightarrow{AP} = \frac{l}{k+l} \cdot \frac{k}{c} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{k}{k+l} \cdot \frac{l}{b} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{kl}{k+l} \left(\frac{1}{c} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{b} \cdot \overrightarrow{AC} \right). \tag{1}$$

W szczególnym przypadku, gdy $k = bc/(a+b)$, $l = b$, mamy sytuację następującą: punkt L pokrywa się z C, a punkt P pokrywa się ze środkiem I okręgu wpisanego w trójkąt ABC, i zgodnie ze wzorem (1):

$$\overrightarrow{AI} = \left(\frac{bc}{a+b} \cdot b \right) \left(\frac{bc}{a+b} + b \right)^{-1} \left(\frac{1}{c} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{b} \cdot \overrightarrow{AC} \right) = \frac{bc}{a+b+c} \left(\frac{1}{c} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{b} \cdot \overrightarrow{AC} \right);$$

stąd

$$\frac{1}{c} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{b} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{2p}{bc} \cdot \overrightarrow{AI}\,. \tag{2}$$

Wracamy do przypadku ogólnego: dla dowolnych parametrów k, l zachodzi równość (1), która po uwzględnieniu wzoru (2) przybiera postać

$$\overrightarrow{AP} = \frac{kl}{k+l} \cdot \frac{2p}{bc} \cdot \overrightarrow{AI} = \frac{2p}{k+l} \cdot \frac{S'}{S} \cdot \overrightarrow{AI}\,.$$

Zatem punkt P pokrywa się z I wtedy i tylko wtedy, gdy $2pS' = (k+l)S$.

336. Przyjmijmy: $v_n = u_{2^n}$, $w_n = v_{n+1}/v_n$. Wykażemy, że $a_n = w_n$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$ (tę równość można odgadnąć wypisując kilka początkowych wyrazów ciągu (a_n) i znajdując ich przedstawienia w postaci ilorazów możliwie najwcześniejszych wyrazów ciągu (u_n)).

Liczby Fibonacciego dane są wzorem jawnym

$$u_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}, \text{ gdzie } \alpha, \beta \text{ są pierwiastkami trójmianu } x^2 - x - 1 \ (\alpha > \beta);$$

zgodnie ze wzorem Viète'a, $\alpha\beta = -1$. Obliczamy:

$$w_n = \frac{\alpha^{2^{n+1}} - \beta^{2^{n+1}}}{\alpha^{2^n} - \beta^{2^n}} = \alpha^{2^n} + \beta^{2^n};$$

stąd

$$w_n^2 = \alpha^{2^{n+1}} + 2(\alpha\beta)^{2^n} + \beta^{2^{n+1}} = \alpha^{2^{n+1}} + 2 + \beta^{2^{n+1}} = w_{n+1} + 2;$$

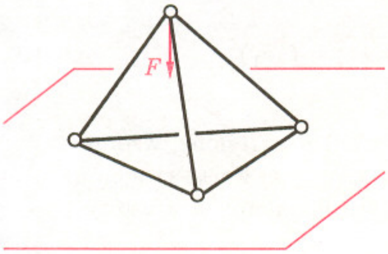
ciąg (w_n) spełnia tę samą rekurencję, co ciąg (a_n). Skoro zaś $w_1 = u_4/u_2 = 3 = a_1$, zatem równość $w_n = a_n$ zachodzi dla wszystkich liczb naturalnych n.

Zadanie z fizyki nr 241

Redaguje Jerzy B. BROJAN

Tym razem wyjątkowo zamieszczamy tylko jedno zadanie.

241. Sześć jednakowych prętów połączono przegubowo tworząc szkielet czworościanu, który postawiono na gładkiej poziomej płycie. O ile przesunie się górny wierzchołek czworościanu pod wpływem siły F skierowanej w dół (rys. 1), jeśli stała sprężystości (stosunek siły do wydłużenia lub skrócenia) jest dla każdego z prętów równa k? Pominąć siłę ciężkości i założyć, że deformacja czworościanu jest niewielka.



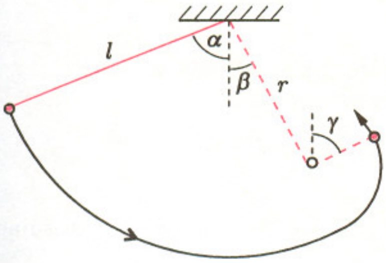
Rys. 1

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 2/1997

Przypominamy treść zadań:

233. Jeden koniec nieważkiej i nierozciągliwej nici o długości l jest unieruchomiony, a do drugiego przymocowano punktowe ciało, odchylono od pionu o kąt $\alpha < 90°$ i puszczono. W odległości r od punktu zawieszenia, pod kątem β do pionu (rys. 2) znajduje się sztywna i cienka poprzeczka, tak że gdy nić się o nią oparła, ciało poruszało się dalej na nici skróconej. Jaki warunek muszą spełniać wymienione parametry, aby po wzniesieniu się do góry ciało spadając uderzyło w poprzeczkę?

234. a) Do jednego końca metalowego pręta przyczepiono kuleczkę wosku, a drugi koniec umieszczono w płomieniu palnika. Kuleczka spadła po czasie t. Po jakim czasie spadłaby ta kuleczka, gdyby pręt był dwukrotnie dłuższy?
b) i c) Kuleczkę wosku przyczepiono w wierzchołku metalowego wycinka kuli (b) lub na osi wycinka walca (c) i zewnętrzną powierzchnię bryły objęto płomieniem palnika. Po jakim czasie spadłaby ta kuleczka, gdyby promień bryły był dwukrotnie większy?



Rys. 2

233. Gdy w czasie wznoszenia się ciała ponad poprzeczkę nić zwiotczeje, dalszy ruch będzie się odbywać wyłącznie pod wpływem siły ciężkości, tzn. po paraboli. Oznaczmy przez γ kąt, jaki tworzy z pionem swobodna część nici w chwili jej zwiotczenia, a przez v – prędkość ciała w tej chwili. Z bilansu energii otrzymujemy

$$\mathrm{g}(-l\cos\alpha + r\cos\beta - (l-r)\cos\gamma) = \frac{1}{2}v^2\,, \tag{1}$$

natomiast warunek zwiotczenia nici (zerowania siły napinającej) wynika z przyrównania siły odśrodkowej do odpowiedniej składowej siły ciężkości

$$\frac{v^2}{l-r} = \mathrm{g}\cos\gamma\,. \tag{2}$$

Z równań (1) i (2) możemy wyznaczyć γ oraz v:

$$\cos\gamma = \frac{2(r\cos\beta - l\cos\alpha)}{3(l-r)}\,, \qquad v^2 = \frac{2}{3}\mathrm{g}(r\cos\beta - l\cos\alpha)\,. \tag{3}$$

Analizując teraz rzut ukośny pod kątem γ do poziomu stwierdzamy, że składowe poziome i pionowe przesunięcia powinny spełniać warunki

$$vt\cos\gamma = (l-r)\sin\gamma\,,$$
$$vt\sin\gamma - \mathrm{g}t^2/2 = -(l-r)\cos\gamma\,.$$

Z tych równań należy wyeliminować czas t lotu po paraboli, a następnie podstawić wzory (3). Po przekształceniach otrzymujemy

$$r\cos\beta - l\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}(l-r)\,.$$

(Zadanie pochodzi z Olimpiady Fizycznej w Singapurze, 1995 r.)

234. Skorzystamy z analizy wymiarowej. Przypomnijmy, że współczynnik przewodnictwa cieplnego λ jest zdefiniowany wzorem

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \lambda S\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\,,$$

gdzie lewa strona przedstawia ilość ciepła przepływającego w jednostce czasu przez powierzchnię S, a iloraz $\mathrm{d}T/\mathrm{d}x$ jest gradientem temperatury. Zatem wymiarem λ jest W/(m·K). Szukany czas t może zależeć jeszcze od ciepła właściwego c, którego wymiarem jest J/(kg·K), od gęstości materiału pręta ϱ (ponieważ ciepło właściwe definiuje się na jednostkę masy, zamiast – jak w tym przypadku byłoby naturalne – na jednostkę objętości), od różnicy temperatur płomienia i początkowej ΔT_p, od różnicy temperatur topnienia wosku i początkowej ΔT_t i od długości pręta (w przypadku a) lub od promienia kuli lub walca (przypadki b i c; oznaczmy ten parametr wspólnym symbolem l). Nie odgrywa natomiast roli pole przekroju pręta, gdyż np. pręt o podwojonym polu przekroju można przedstawić jako dwa pręty złożone równolegle, przy czym przepływ ciepła w jednym z nich nie wpływa na drugi (podobnie nie odgrywa roli kątowa wielkość wycinków ani wysokość walca). Zgodność wymiarów w zależności

$$t = f(\lambda, c, \varrho, \Delta T_p, \Delta T_t, l)$$

zapewni tylko funkcja f postaci

$$f = c\varrho l^2/\lambda \cdot f_1(\Delta T_p/\Delta T_t)\,.$$

Podwojenie wartości parametru l spowoduje zatem we wszystkich przypadkach czterokrotne wydłużenie czasu do chwili spadku kuleczki.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 227 (WT=3,04), 228 (WT=2,56)
z numeru 11/1996

Przemysław Gworys	– Częstochowa	43,67
Andrzej Idzik	– Bolesławiec	38,72