Kącik olimpijski (21)

Gdy pochodna funkcji maleje...

Niech $f : X \to \mathbf{R}$, gdzie $X = (0, a)$ lub $X = (0, +\infty)$, będzie funkcją różniczkowalną w przedziale X. Prawdziwe jest wówczas następujące

Twierdzenie. *Jeżeli funkcja f ma w przedziale $(0, a)$ pochodną malejącą, to dla każdej trójki takich liczb α, x_1, x_2, że $\alpha > 0$ i $0 < x_1 < x_2 < a - \alpha$, zachodzi nierówność*

$$f(\alpha + x_2) - f(x_2) \le f(\alpha + x_1) - f(x_1)\,.$$

Dowód. Ponieważ f' maleje, więc pochodna funkcji F określonej wzorem $F(x) = f(\alpha + x) - f(x)$ przyjmuje w przedziale $(0, a - \alpha)$ wartości ujemne. Zatem F maleje w przedziale $(0, a - \alpha)$, a stąd wynika nierówność z tezy twierdzenia. ■

Wniosek 1. *Jeśli pochodna funkcji f maleje w przedziale X oraz $f(0) \ge 0$, to dla każdych x_1, x_2, takich, że $x_1 + x_2 \in X$, spełniona jest nierówność $f(x_1 + x_2) \le f(x_1) + f(x_2)$.*

Dowód. Ponieważ f' maleje w przedziale X, więc f jest wklęsła w tym przedziale. Stąd, wobec tego, że $f(0) \ge 0$, otrzymujemy

$$f\left(\frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x+0}{2}\right) \ge \frac{f(x) + f(0)}{2} \ge \frac{f(x)}{2}\,.$$

Dla $x_1 = x_2$ jest to nierówność z tezy wniosku. Jeśli zaś np. $x_1 < x_2$, to stosując twierdzenie dla $\alpha = x_1$ dostajemy

$$f(x_1 + x_2) - f(x_2) \le f(x_1 + x_1) - f(x_1) \le 2f(x_1) - f(x_1) = f(x_1)\,.$$

Stąd, oczywiście, $f(x_1 + x_2) \le f(x_1) + f(x_2)$. ■

Wniosek 2. *Jeśli pochodna funkcji f maleje w przedziale X oraz $f(0) \ge 0$, to dla każdego układu liczb $a_i, b_i \in X$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ spełniających dla dowolnego i nierówności $a_i < b_i \le a_{i+1}$, zachodzi nierówność*

$$\sum_{i=1}^{n} (f(b_i) - f(a_i)) \le f\left(\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)\right).$$

Dowód. Z poprzedniego wniosku wynika, że $f(b_1) - f(a_1) \le f(b_1 - a_1)$, natomiast bezpośrednio z twierdzenia mamy

$$f(b_k) - f(a_k) \le f\left((b_k - a_k) + \sum_{i=1}^{k-1} (b_i - a_i)\right) - f\left(\sum_{i=1}^{k-1} (b_i - a_i)\right), \quad k = 2, \ldots, n\,.$$

Wystarczy teraz dodać wszystkie te nierówności stronami. ■

Ostatni wniosek pozwala udowodnić szereg ciekawych nierówności. Poniżej proponujemy kilka przykładów do samodzielnego rozpatrzenia (proszę sprawdzić, czy spełnione są wszystkie założenia).

– Dla $0 \le a_1 < b_1 \le a_2 < b_2 \le \ldots \le a_n < b_n \le \frac{\pi}{2}$ zachodzi nierówność

$$\sum_{i=1}^{n} (\sin b_i - \sin a_i) \le \sin\left(\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)\right).$$

– Dla dodatnich $a_i < b_i \le a_{i+1}$ mamy

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{1 + b_i}{1 + a_i} \le 1 + \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)\,.$$

(Wskazówka: wziąć $f(x) = \ln(1 + x)$ dla $x \ge 0$.)

Inne przykłady dostaniemy biorąc funkcje $\operatorname{arc\,tg} x$, $\sqrt[m]{x}$ czy $x/(1 + x)$.

Henryk PAWŁOWSKI

Rozwiązanie zadania F 453. Z zasady zachowania energii prędkość kulek przed zderzeniem wynosi $v = \sqrt{2gr}$. Zmiana pędu jest związana ze średnią siłą F wzorem $\Delta p = F \cdot \Delta t$. Stąd

$$F = m\frac{\sqrt{2gr}}{\Delta t} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \frac{\sqrt{2gr}}{\Delta t}\,,$$

co po podstawieniu wartości daje 3,4 kN (350 kG).

Rozwiązanie zadania F 454. Niestety, zmniejszenie nacisku na podłoże poprzez równomierne (bez zmiany tempa) żonglowanie nie jest możliwe. W takim przypadku rzut środka ciężkości układu n pocisków o masie m każdy na kierunek pionowy oscyluje wokół stałej średniej wysokości. Zmiana składowej pionowej pędu tego układu w całym cyklu jest więc równa zeru

$$\Delta p = \int_{\text{cykl}} (F(t) - n \cdot m \cdot g)\,dt = 0\,,$$

gdzie $F(t)$ jest zależną od czasu siłą, z jaką kanonier działa na pociski. Widać stąd, że średnia siła

$$\langle F \rangle = n \cdot m \cdot g$$

jest równa co do wartości ciężarowi układu pocisków. Tak więc średni dodatkowy nacisk związany z pociskami jest równy ich ciężarowi. Minimalną wartość maksymalną tego nacisku otrzymamy w przypadku działania stałą siłą $F(t) = n \cdot m \cdot g$. (Ciekawym ćwiczeniem może być przekonanie się, że wtedy amplituda oscylacji wokół stałej wysokości jest zerowa.)

Ale może zmiana tempa może pomóc? Tak, może, o ile będzie to powodować przyspieszone opadanie środka ciężkości. Jest to jednak metoda co najwyżej tak skuteczna jak kucanie, tylko trochę bardziej ambitna, czyli wojsko – wojskiem, a grawitacja – grawitacją.

Rozwiązanie zadania M 811. Na mocy poprzedniego zadania

$$P(X_n \ge 1) \le EX_n = (2p)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

Zatem prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że dla każdego $n \in N$ będzie $X_n \ge 1$, nie przekracza – dla dowolnej liczby naturalnej k – wartości $(2p)^k$. Jest to więc prawdopodobieństwo zerowe, co oznacza, że bakterie z prawdopodobieństwem 1 wyginą po upływie pewnego czasu.